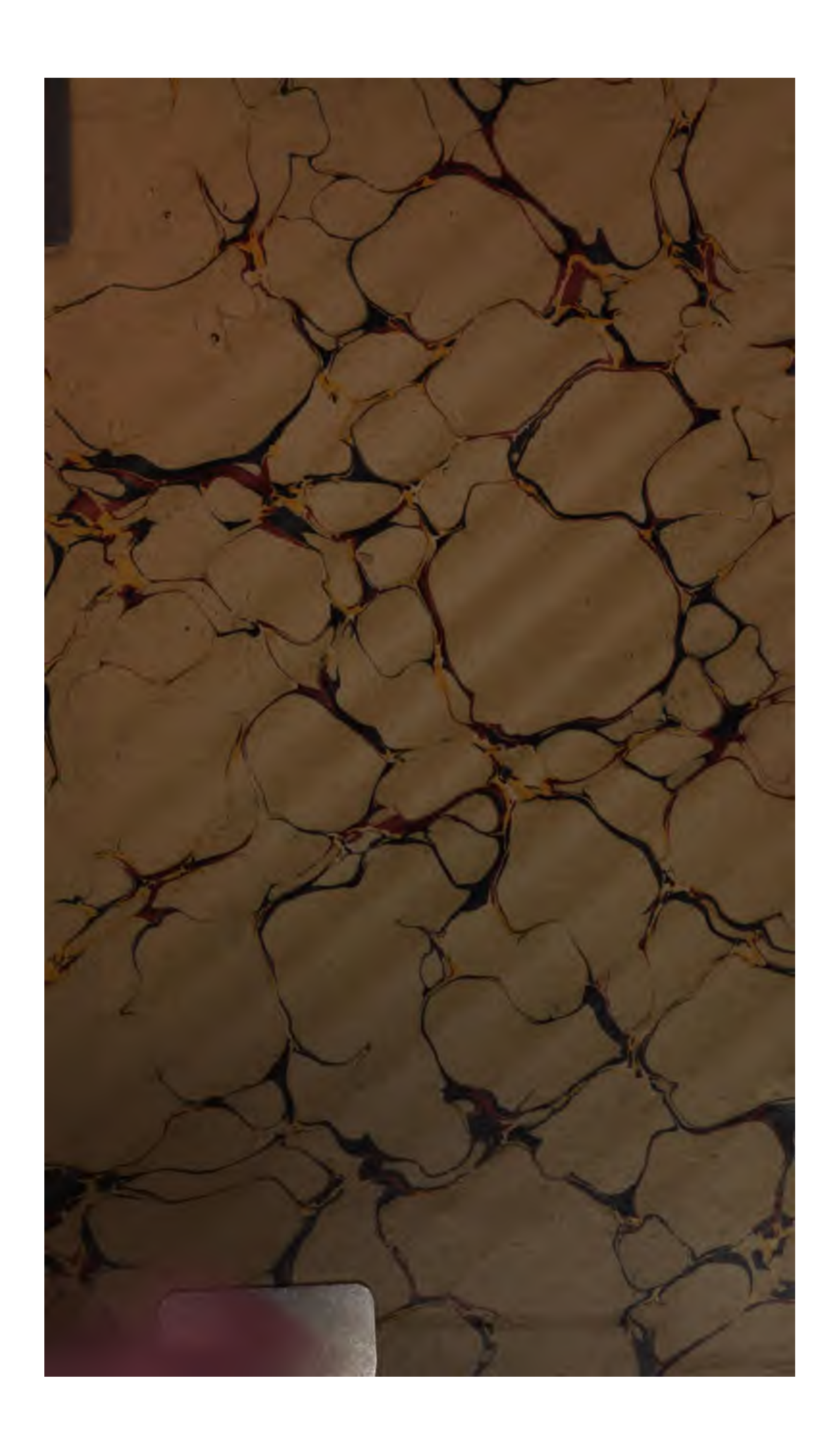

Stanford University Libraries
3 6105 027 441 158







BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

8

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES
ET
ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. ANDRÉ, BATTAGLINI, BOUGAÏEF, BROCARD, KLEIN, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, POTOCKI, RADAU, WEYR, ETC.,

SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME ONZIÈME. — SECOND SEMESTRE 1876.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1876

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. CHASLES, *président*.

BERTRAND.

HERMITE.

SERRET.

PUISEUX, *secrétaire*.

LISTE DES COLLABORATEURS DU BULLETIN.

MM. Baillaud, professeur au Lycée Charlemagne.
Battaglini, professeur à l'Université de Rome.
Beltrami, professeur à l'Université de Rome.
Bertrand (J.), secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences.
Bonnet (O.), membre de l'Institut.
Bouquet, membre de l'Institut.
Brocard, capitaine du Génie à Alger.
Clebsch, professeur à l'Université de Göttingue.
De Tilly, capitaine d'Artillerie, à Bruxelles.
De la Rue, professeur à l'Université Kharkof.
Dewulf, commandant du Génie, aux îles d'Hyères.
Hermite, membre de l'Institut.
Imschenetsky, professeur à l'Université de Kharkof.
Klein, professeur à l'Université d'Erlangen.
Laguerre, répétiteur à l'École Polytechnique.
Lampe, professeur à Berlin.
Laurent (H.), répétiteur à l'École Polytechnique.
Lie, professeur à l'Université de Christiania.
Lindelöf, professeur à l'Université de Helsingfors.
Lipschitz, professeur à l'Université de Bonn.
Mannheim, professeur à l'École Polytechnique.
Mansion (P.), professeur à l'Université de Gand.
Padova, professeur à Pise.
Pellet, professeur au Lycée de Bourg.
Potocki, licencié ès Sciences, à Bordeaux.
Rayet, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.
Resal, membre de l'Institut.
Serret (J.-A.), membre de l'Institut.
Simon (Ch.), professeur au Lycée Louis-le-Grand.
Tisserand, directeur de l'Observatoire de Toulouse.
Weyr (Em.), professeur à l'Institut Polytechnique tchèque.
Wolf (R.), professeur à Zurich.
Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

GLAISHER (J.-W.-L.), Reporter. — REPORT OF THE COMMITTEE ON MATHEMATICAL TABLES, consisting of Prof. A. Cayley, Prof. G.-G. Stokes, Prof. sir W. Thomson, Prof. H.-J.-S. Smith, Mr. J.-W.-L. Glaisher. — London, 1873. Printed by Taylor and Francis, in-8°, 175 p.

Un astronome viennois, qui a visité les États-Unis pendant l'été de 1873, rapporte qu'il a vu, dans le jardin d'un Observatoire (l'Observatoire Dudley, à Albany), une machine à calculer suédoise occupée à calculer des Tables de réfraction sous l'impulsion d'un moulin à vent. Ce simple fait ouvre toute une perspective d'avenir : c'est peut-être pour les Sciences mathématiques un pas comparable à celui qui a été fait en industrie par l'introduction des machines-outils. Les Tables de toutes sortes qui nous épargnent la peine de calculer dans chaque cas les valeurs numériques des diverses fonctions ne sont autre chose que des machines d'une espèce particulière ; mais ces machines ne sont encore ni assez nombreuses ni assez puissantes, et cela sans doute parce qu'elles coûtent trop cher à construire. C'est pourquoi il faut nous réjouir de voir surgir des inventions qui permettent de les *fabriquer* plus vite et à moins de frais.

Lorsqu'on songe à l'immense quantité de matériaux accumulés depuis près d'un siècle par le zèle des observateurs, matériaux qui vieillissent et perdent chaque jour en valeur en attendant qu'on

puisse les réduire et les discuter, on ne peut en effet s'empêcher de souhaiter que le travail de ces réductions soit simplifié et rendu abordable par la construction de Tables appropriées. Jusqu'à présent les Tables auxiliaires en usage parmi les astronomes, les météorologistes, les physiciens, ne sont guère encore que des outils primitifs, qui permettent d'aller plus vite en besogne, mais qui sont loin d'épargner les calculs. Que de chiffres à remuer, par exemple, pour réduire le lieu apparent d'une étoile à son lieu moyen ou réciproquement ! Que d'opérations à faire, tout en nous aidant des Tables connues, pour nous débarrasser des effets de la précession, de la nutation, de l'aberration, puis de la réfraction et du mouvement propre, et parfois de la parallaxe annuelle ! Quelle perte de temps et quelle source d'erreurs que ces opérations multiples et fastidieuses !

Évidemment les Tables auxiliaires auraient besoin d'être spécialisées davantage ; le temps et le travail qu'on y consacrerait seraient regagnés au centuple par l'économie de temps et d'argent qui en résulterait pour la réduction des observations.

D'un autre côté, que de fonctions dont l'analyse a découvert et développé les admirables propriétés attendent, pour devenir vraiment utiles, pour obtenir droit de cité dans les bureaux de calcul, que des Tables suffisamment étendues et commodes permettent d'en faire couramment usage !

Le moment est donc venu, ce semble, de faire l'inventaire général de ce qu'on possède en matière de Tables, de déterminer ce qui reste à faire et surtout ce qui est urgent, puis d'attaquer résolûment la confection des Tables que les besoins de la Science réclament aujourd'hui.

C'est ce qu'a compris l'Association Britannique pour l'avancement des Sciences, et c'est de cette préoccupation qu'est né un premier Rapport présenté à l'Association en 1872, à la réunion de Brighton, par une Commission composée de MM. Cayley, Stokes, Thomson, Smith, membres de la Société Royale de Londres, et de M. J.-W.-L. Glaisher, rapporteur.

Ce Rapport, qui a été imprimé en 1873, après avoir reçu quelques développements nouveaux, remplit 175 pages ; il n'y est encore question que des Tables mathématiques proprement dites, qui sont d'un usage énéral dans toutes les branches des Mathématiques

pures ou appliquées. Très-concis, très-substantiel, il entre en matière sans préambule : « La Commission a été nommée en vue d'un double objet : 1° former un Catalogue aussi complet que possible des Tables mathématiques qui existent ; 2° réimprimer ou construire les Tables qui seraient nécessaires aux progrès des Sciences mathématiques ».

Les Rapports du Comité des Tables paraîtront dans le Compte rendu annuel des réunions de l'Association Britannique ; mais pour les Tables on a décidé qu'elles seraient imprimées à part, et livrées à la publicité au fur et à mesure de leur impression. Comme elles sont stéréotypées, les clichés de ces Tables restent entre les mains du Comité, qui se propose de les réunir plus tard en volume. Le format choisi est l'in-4° des *Transactions Philosophiques* de la Société Royale ; il permettra de donner sur la même page les valeurs des fonctions et jusqu'aux trois premières différences.

On voulait d'abord commencer par l'impression des Tables d'exponentielles ou antilogarithmes hyperboliques (e^x et e^{-x}) et des sinus et cosinus hyperboliques, dont M. Glaisher avait entrepris la construction avant la nomination du Comité. On se proposait ensuite d'aborder le calcul des fonctions de Bessel et des fonctions elliptiques ; mais on a préféré ajourner les fonctions hyperboliques pour permettre à M. Glaisher de consacrer tout son temps à l'achèvement des Tables des fonctions elliptiques, dont la publication a paru plus urgente.

Dresser l'inventaire complet des Tables numériques déjà existantes était avant tout chose indispensable ; car ces Tables sont éparpillées dans les divers Recueils spéciaux, dans les publications des nombreuses Sociétés savantes, etc., et il n'est pas facile de s'assurer, dans chaque cas particulier, si telle Table qu'il paraît utile de faire construire n'a pas été déjà publiée quelque part. Si, dans toutes les parties de la Science, il est malaisé de savoir exactement ce qui a été déjà fait, ici la difficulté est encore augmentée par cette circonstance, que souvent le titre que portent certaines Tables en cache la véritable nature, ou du moins ne suffit pas pour la faire deviner. Des Tables numériques destinées à telle application spéciale seraient parfois d'un grand usage pour des calculs d'une nature toute différente, et il arrive ainsi que l'astronome ou le physicien regrette le manque d'une Table qui existe depuis longtemps, déguisée sous un

nom qui déroute les recherches, et même qu'il se décide à la calculer à nouveau pour l'objet qu'il a en vue, perdant ainsi un temps précieux à refaire un travail fait avant lui. On sait déjà, par exemple, que l'intégrale

$$\int_x^\infty e^{-x^2}\,dx,$$

qui, réduite en Tables, sert à la détermination de l'erreur probable dans la méthode des moindres carrés, joue également un rôle important dans la théorie de la réfraction astronomique ([1]) et dans la théorie de la chaleur, de sorte que la même Table peut servir pour les recherches en apparence les plus hétérogènes. De même les recueils de Tables nautiques donnent les logarithmes des sinus verses et des cosécantes sous le titre de « Tables pour le calcul de la latitude par deux hauteurs du Soleil », etc. Il est donc évident qu'avant toute chose il était nécessaire de former un Catalogue des Tables existantes avec indication exacte de leur nature et de leur contenu.

Le Catalogue du Comité doit comprendre toutes les Tables numériques qui de près ou de loin appartiennent aux Sciences mathématiques ou paraissent propres à faciliter des recherches qui en relèvent ; mais on laissera de côté toutes celles dont les nombres ou seulement les données fondamentales sont d'une nature empirique, c'est-à-dire empruntées à l'observation ou à l'expérience, comme aussi toutes celles qui concernent des applications spéciales qu'on ne saurait classer dans les Sciences mathématiques.

C'est ainsi qu'on a cru devoir exclure la plupart des Tables astronomiques, les Catalogues d'étoiles, les Tables de réfraction, les Tables qui dépendent de la figure de la Terre, etc., les données de ces Tables étant essentiellement dérivées de l'observation. On a également laissé de côté les Tables des équivalents chimiques, des poids spécifiques, les Tables de conversion des poids et mesures, celles qui servent au calcul de la longitude en mer, les Tables de mortalité, enfin celles qui se rapportent aux assurances ou qui sont destinées aux calculs commerciaux, sauf quelques-unes qui offrent

---

([1]) *Voir*, par exemple, KRAMP, *Analyse des réfractions astronomiques et terrestres*. Leipsic et Paris, an VII.

un certain intérêt au point de vue des Mathématiques pures, comme par exemple les Tables d'intérêts composés, qui peuvent être envisagées comme des Tables de puissances, ou certaines Tables nautiques qui, malgré leur titre annonçant un usage tout spécial, sont simplement des Tables trigonométriques. Même pour les Tables de logarithmes, etc., le rapport n'a pas la prétention d'être absolument complet : M. Glaisher déclare expressément qu'il s'est dispensé de mentionner une foule d'Ouvrages du siècle dernier qui lui ont paru dénués d'intérêt, ainsi que des Tables italiennes, espagnoles, etc. (il aurait pu ajouter : françaises et allemandes) relativement récentes, qu'il n'a pu se procurer ([1]).

Avant d'entreprendre la description des diverses Tables numériques qui existent, il fallait s'entendre sur une classification rationnelle. Le Comité adopta la classification suivante, qui est due à M. Cayley.

A. — Tables auxiliaires pour les calculs qui se font sans logarithmes.

1. Multiplication.
2. Quarts de carrés.
3. Carrés, cubes et puissances suivantes; valeurs réciproques, etc.

B. — Logarithmes et fonctions circulaires.

4. Logarithmes vulgaires et antilogarithmes; logarithmes d'addition et de soustraction, etc.
5. Fonctions circulaires (sinus, cosinus, etc.), valeurs naturelles; longueurs des arcs de cercle.
6. Logarithmes des fonctions circulaires.

C. — Fonctions exponentielles.

7. Logarithmes hyperboliques.
8. Antilogarithmes hyperboliques (e^x) et log tang $\left(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi\right)$; sinus et cosinus hyperboliques, etc.; valeurs naturelles et logarithmes.

([1]) On verra plus loin que, parmi les Recueils oubliés dans le Rapport, il y en a de fort répandus et qui méritent de l'être. Ces lacunes, que les ressources immenses de l'Association Britannique auraient pu mettre la Commission en état de combler, nous semblent ôter au Catalogue actuel une partie de sa valeur. C'est surtout en cette occasion que l'on peut reconnaître l'utilité de cultiver avec plus de soin la Bibliographie mathématique.

D. — Constantes algébriques.

9. Valeurs exactes en nombres entiers ou fractionnaires : nombres de Bernoulli, $\Delta^n o^m$, ... Coefficients binominaux.

10. Valeurs approchées en fractions décimales, pour le calcul des développements en séries.

E. — Constantes transcendantes.

11. Les nombres e, π, γ, ..., avec leurs puissances, et fonctions de ces nombres.

F. — Fonctions arithmétiques (*arithmological*).

12. Diviseurs, nombres premiers. Racines premières. *Canon arithmeticus*, etc.

13. Équation de Pell.

14. Décompositions.

15. Formes quadratiques, $a^2 + b^2$, ... Décomposition des nombres en carrés, cubes, bicarrés, etc.

16. Formes binaires, ternaires, etc., quadratiques, etc.

17. Théories complexes.

G. — Fonctions transcendantes.

18. Fonctions elliptiques.

19. Fonctions Γ (intégrales eulériennes).

20. Sinus intégral, cosinus intégral, logarithme intégral.

21. Fonctions de Bessel, etc.

22. Coefficients des perturbations pour des valeurs données de $\frac{a}{a'}$.

23. Transcendantes logarithmiques.

24. Mélanges.

Le seul moyen sûr de découvrir toutes les Tables, comprises dans cette classification, qui ont été publiées, c'était de parcourir l'un après l'autre tous les volumes des Recueils scientifiques mentionnés dans la liste, qui se trouve en tête du *Catalogue of scientific Papers*, imprimé par la Société Royale, sans négliger de consulter les catalogues des libraires étrangers. Il s'agissait là de compulser avec attention bien des milliers de volumes, et l'on comprend qu'une pareille besogne demande des années. Heureusement que cette difficulté n'existait pas pour certaines catégories de Tables, comme celles qui sont comprises dans les groupes A, B, C 7, F 12, ces sortes de Tables ayant été généralement publiées à part, dans

des volumes spéciaux. On pouvait donc espérer d'achever cette partie du Rapport dans un délai assez rapproché, et c'est en effet la partie qui a été présentée à l'Association. On se voyait ainsi forcé d'abandonner l'ordre indiqué par la classification de M. Cayley; mais cette classification sera rétablie dans ses droits lorsqu'on dressera l'index général des divers Rapports.

Au point de vue purement pratique, les diverses Tables peuvent évidemment se classer comme il suit :

1° Tables auxiliaires (*subsidiary Tables*), destinées à faciliter les calculs, mais sans intérêt par elles-mêmes : telles sont les Tables de logarithmes, les Tables trigonométriques, les Tables de multiplication, etc; presque toutes ces Tables ont été publiées à part.

2° Tables définitives (*conclusive Tables*), dont les nombres ont de l'intérêt par eux-mêmes; cette catégorie comprend : (*a*) les Tables de fonctions continues, qui sont généralement des intégrales définies ; (*b*) les Tables qui se rattachent à la théorie des nombres.

C'est sur la première de ces divisions que roule, comme nous l'avons déjà dit, le premier Rapport présenté à l'Association Britannique par la Commission. On a soin d'ailleurs de nous avertir que ce travail n'a qu'un caractère essentiellement provisoire, et qu'on se propose de le compléter un jour par un Rapport supplémentaire.

Le nombre des Tables comprises dans cette première division, et qui sont décrites dans le Rapport, est, soit dit en passant, beaucoup plus grand que celui des Tables de la seconde division ; en revanche, elles n'exigent pas, comme ces dernières, des explications détaillées. Presque toutes ont été publiées dans des ouvrages séparés; cinq ou six seulement sont mentionnées dans le Rapport, qui ont été insérées dans des Recueils périodiques. Au contraire, c'est là qu'il faudra chercher presque toutes les Tables qui forment la deuxième division.

Dès le principe, mais contrairement aux intentions primitives, le Rapport a pris la forme d'un compte rendu bibliographique. Il ne pouvait en être autrement. Tandis, en effet, que, dans une science qui se développe, les livres anciens sont bientôt détrônés par les livres nouveaux, et n'ont plus qu'un intérêt historique, une Table numérique représente une quantité de travail une fois fait et qui, s'il a été bien fait, l'a été pour tout jamais. C'est un capital, au

même titre que l'or en barre qui a été extrait des entrailles de la terre. Beaucoup de Tables qui datent du XVIIe siècle ont conservé leur pleine utilité : l'*Arithmetica logarithmica* de Vlacq (1628) est encore la meilleure Table de logarithmes à dix décimales, et le *Canon sinuum* de Pitiscus (1613) la meilleure Table des sinus naturels ; on peut dire la même chose du *Canon triangulorum logarithmicus* (logarithmes naturels), publié par Ursinus en 1624. Telle Table a été calculée en vue d'un but spécial, lequel dans la suite a perdu son intérêt ; elle n'en est pas moins l'expression d'une certaine quantité de vérités abstraites, et elle garde à ce titre une certaine valeur, et pourra, un jour ou l'autre, être utilisée pour une application nouvelle et imprévue. C'est pour toutes ces raisons qu'on n'a pas jugé inutile d'entrer dans quelques détails bibliographiques, même sur les Recueils de Tables anciens qui, à première vue, ne paraissaient pas offrir une grande importance. On s'est notamment efforcé de fournir des indications sur le degré d'exactitude qu'il est permis d'attribuer à ces Recueils.

On a aussi profité de l'occasion pour donner une description quelque peu détaillée de divers ouvrages qui jouent un rôle mémorable dans l'histoire des Mathématiques et qui sont généralement décrits d'une manière fort inexacte. Des détails de ce genre étaient d'autant plus nécessaires que les titres des ouvrages sont souvent trompeurs. Sous le titre de « Tables de logarithmes à huit décimales », on rencontre des Tables à cinq décimales, avec une formule pour calculer les trois autres. La Table de logarithmes publiée par Steinberger en 1840 prétend donner les logarithmes de tous les nombres depuis 1 jusqu'à 1000000, mais elle s'arrête en réalité à 10000 ; l'interpolation doit faire le reste ! D'autres fois un Catalogue de librairie annonce une « Table des diviseurs des nombres depuis 1 jusqu'à 1000000 », et oublie d'ajouter qu'il ne s'agit que de la première section (1 à 150000), qui a été seule publiée ; et ainsi de suite.

Dans les premiers temps qui suivirent l'invention des logarithmes, l'usage était d'inscrire le nom de Neper en tête des Tables et d'y ajouter celui de Briggs quand le livre renfermait des logarithmes vulgaires. C'est de là qu'est venue l'erreur assez commune qui consiste à attribuer à Briggs ou à Neper l'*Arithmetica* d'Adrien Vlacq. Si l'on ajoute à cela les cent manières différentes dont les

contemporains orthographiaient les noms des premiers inventeurs des logarithmes, on comprendra aisément que les rapporteurs aient eu quelque peine à débrouiller les informations concernant les premiers Recueils de Tables logarithmiques.

Des Notices bibliographiques sur ces vieux livres forment un élément important de l'Histoire des Sciences mathématiques en général, et elles ont d'autant plus de prix que les renseignements que l'on trouve dans les Recueils bibliographiques sont souvent peu dignes de confiance. « L'examen d'un grand nombre d'Ouvrages spéciaux qu'il nous a fallu consulter », dit M. Glaisher, « a montré combien sont inexacts, non-seulement dans les détails, mais encore dans les faits importants, les renseignements bibliographiques qu'on rencontre chez la plupart des écrivains. Si nous exceptons Delambre, Lalande (*Bibliographie astronomique*) et de Morgan, on peut dire hardiment qu'il n'est pas un seul écrivain sur la matière auquel on puisse se fier complétement (¹). Ceux qui ont eu l'occasion d'élucider un point d'histoire, comme par exemple l'invention des logarithmes, peuvent seuls juger du peu de souci qu'on avait de l'exactitude avant le commencement du siècle présent, qui peut être considéré comme l'aurore d'un âge plus scrupuleux ».

Parmi les listes de Tables mathématiques dressées par divers érudits avant la nomination du Comité de l'Association Britannique, la plus complète était celle que de Morgan avait donnée en 1842, à l'article *Table* de la *Penny Cyclopædia,* et qu'il avait ensuite fait réimprimer avec beaucoup d'additions, dans l'Encyclopédie de Knight (*English Cyclopædia*), en 1861. Cette liste renferme 457 Tables, dont beaucoup cependant étaient en dehors du cadre de ce Rapport.

On a puisé en outre des indications plus ou moins précieuses dans les Ouvrages suivants :

HEILBRONNER. — *Historia Matheseos universæ.* — Lipsiæ, 1742.
KAESTNER (A.-G.).— *Geschichte der Mathematik.* — Göttingen, 1796-1800.
MURHARD (J.-W.-A.).— *Bibliotheca mathematica.* — Lipsiæ, 1797-1804.
ROGG (J.). — *Bibliotheca mathematica sive index criticus librorum mathemati-*

(¹) M. Glaisher aurait pu citer, à côté des précédents auteurs, l'étude remarquable publiée par Biot en 1835, dans le *Journal des Savants.*

corum, etc. — Tubingue, 1830. — De cet Ouvrage, la première Section seule a été publiée.

SOHNCKE (L.-A.). — *Bibliotheca mathematica*. (Catalogue de livres publiés de 1830 à 1854.) — Leipzig et Londres, 1854.

LA LANDE (J. DE). — *Bibliographie astronomique*. — Paris, 1803.

ERSCH (J.-S.). — *Literatur der Mathematik, Natur-und Gewerbskunde*. Neue Ausgabe, von J.-W. Schweigger-Seidel. — Leipzig, 1828.

POGGENDORFF. — *Biographisch-literarisches Handwörterbuch*. — Leipzig, 1863.

MILLIET-DECHALES (R.-P.). — *Cursus seu mundus mathematicus*. — Lugduni, 1690.

MORGAN (DE). — *Arithmetical Books*. — London, 1847.

PEACOCK. — *History of Arithmetic*, etc., etc.

Le Comité n'a pu se procurer le Recueil de Scheibel (*Einleitung zur math. Bücher-Kenntniss*, Breslau, 1769-1798), qui est souvent cité par Murhard et d'autres. L'*Histoire des Mathématiques* de Montucla n'a rendu aucun service ; au contraire l'*Histoire de l'Astronomie moderne* de Delambre (Paris, 1821) a fourni de précieux renseignements.

Les bibliothèques qui ont été mises à contribution pour la description des Ouvrages sont celles du British Museum, de la Société Royale, de l'Université de Cambridge, de l'Observatoire de Greenwich, du Collége de la Trinité à Cambridge, de la Société Royale Astronomique, et celle de feu Graves, qui appartient au Collége de l'Université de Londres et qui renferme une des plus belles collections de livres de Mathématiques anciens ; malheureusement cette dernière n'était pas encore classée, et plusieurs des grandes bibliothèques publiques n'ont pas de Catalogue. De là sans doute plus d'une lacune grave dans le Rapport ; on s'en aperçoit en jetant les yeux sur la statistique suivante, où sont classés par nationalités les 230 Recueils de Tables que le rapporteur a pu se procurer :

Angleterre	109	Suisse	2
Allemagne, Autriche	66	Espagne	1
France	27	Portugal	1
Hollande	8	Suède	1
Danemark	7	Russie	1
Italie	3	Égypte	1
États-Unis	3		

Le Comité espère que ces lacunes pourront être comblées par la publication d'un supplément, et il prie les mathématiciens et les bibliophiles de tous pays de lui communiquer les titres des Ouvrages non mentionnés dans son Catalogue qui seraient à leur connaissance ([1]). On se propose également de donner dans ce supplément une plus large place aux *errata* des Tables les plus répandues. On trouvera plus loin une liste de quelques-uns des Ouvrages qui ne figurent pas dans le Rapport, et qui pour la plupart nous ont été obligeamment signalés par M. Hoüel.

Le Rapport décrit d'abord avec plus ou moins de détails les Tables numériques classées sous les vingt-cinq rubriques suivantes :

1. Tables de multiplication.
2. Parties proportionnelles.
3. Quarts de carrés.
4. Carrés, cubes, racines carrées et cubiques.
5. Puissances plus élevées que la troisième.
6. Conversion des fractions ordinaires en fractions décimales.
7. Valeurs réciproques.
8. Diviseurs et nombres premiers.
9. Tables sexagésimales et sexcentenaires.
10. Valeurs naturelles des fonctions trigonométriques.
11. Longueurs des arcs de cercle.
12. Conversion des heures, minutes et secondes en fractions du jour; conversion du temps en degrés, et *vice versa*.
13. Logarithmes vulgaires.
14. Antilogarithmes.
15. Logarithmes vulgaires des fonctions trigonométriques.
16. Logarithmes naturels (ayant pour base le nombre e).
17. Logarithmes népériens.
18. Logarithmes logistiques et proportionnels.
18. Logarithmes d'addition et de soustraction.
20. Conversion des logarithmes vulgaires en logarithmes naturels, et *vice versa*.
21. Tables d'interpolation.

([1]) Ces Communications devront être adressées à M. J.-W.-L. Glaisher, Trinity College, Cambridge.

22. Tables de mensuration (aires de surfaces, volumes, etc.).
23. Logarithmes dualistiques.
24. Constantes mathématiques, nombres usuels.
25. Tables diverses : nombres figurés, etc.

Cette description analytique remplit 70 pages du Rapport (p. 14-85); chacun des paragraphes consacrés aux diverses catégories de Tables est précédé d'une courte introduction. Dans la seconde partie du Rapport, on trouve la description détaillée de 118 Ouvrages, qui sont des Recueils de Tables diverses et qu'il eût été difficile de classer sous l'une des 25 rubriques spéciales qui précèdent (p. 85-143). Enfin les titres de tous les Ouvrages décrits dans ces deux Chapitres sont réunis dans une liste où ils sont classés par ordre alphabétique des noms d'auteurs (p. 143-164). Un *post-scriptum* rend compte de l'état du travail au moment de l'impression du Rapport.

Ne pouvant suivre le savant rapporteur dans les détails qu'il donne sur l'histoire de ces diverses catégories de Tables, nous nous contenterons de prendre çà et là ce qui nous a paru intéressant.

Les premières Tables de multiplication sont probablement celles de Thomas Finck, publiées à Copenhague en 1604; mais les premières qui aient une certaine étendue sont celles de Herwart de Hohenburg (1610), qui ont été égalées, mais non surpassées, par les Tables de Crelle (1864), les plus commodes que l'on possède aujourd'hui, et les plus répandues.

Ces Tables étant à double entrée, on a cherché, par divers artifices, à construire des Tables de multiplication à une seule entrée; telles sont les Tables des quarts des carrés (*arithnomes*), dont le principe est fondé sur la formule

$$ab = \frac{1}{4}(a+b)^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2.$$

Pour obtenir le produit de deux nombres a, b, il suffit de chercher dans la Table le quart du carré de leur somme et celui de leur différence, et de retrancher le dernier du premier. Voisin a fait paraître une Table de ce genre en 1817; mais Ludolf en avait indiqué le principe dès 1690. D'autres Tables analogues ont été publiées par Centnerschwer (1825), Merpaut (1832), Laundy (1856).

Ce dernier avait été conduit à construire ses Tables par la lecture d'un Mémoire de M. Sylvester. Au reste, une Table des carrés peut évidemment servir au même usage, témoin la *Table des carrés* publiée dans ce dessein par M. A. Gossart en 1865.

Laplace, dans un Mémoire *Sur divers points d'Analyse* que l'on trouve dans le *Journal de l'École Polytechnique* (1809), s'est également occupé de cette question; il montre que la multiplication au moyen d'une Table à une seule entrée peut s'obtenir de trois manières différentes : par les logarithmes, par les quarts de carrés, et par les fonctions trigonométriques en profitant de la relation connue

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)].$$

« Cette manière ingénieuse ([1]) de faire servir des Tables de sinus à la multiplication des nombres », dit-il, « fut imaginée et employée un siècle environ avant l'invention des logarithmes ».

Il est à remarquer que le produit $\sin a \sin b \sin c$ peut s'exprimer d'une manière analogue par une somme de quatre sinus, puisque

$$\sin a \sin b \sin c = \frac{1}{4}[\sin(a+b-c) + \sin(a+c-b) + \sin(b+c-a) - \sin(a+b+c)],$$

et qu'on trouve des expressions analogues pour les produits de quatre et cinq sinus, etc.; de sorte que les Tables de sinus permettent d'exécuter la multiplication d'un nombre quelconque de facteurs. C'est là une supériorité que les formules trigonométriques ont sur les formules algébriques correspondantes; car, en partant de ces dernières, la multiplication de deux facteurs exigerait une Table des carrés, la multiplication de trois facteurs une Table des cubes, et ainsi de suite, puisque

$$abc = \frac{1}{24}[(a+b+c)^3 - (a+b-c)^3 - (a+c-b)^3 - (b+c-a)^3], \text{ etc.}$$

Ces formules algébriques se déduisent d'ailleurs des formules

([1]) Méthode de la prostaphérèse, connue du temps de Tycho Brahe. (Voir les *Astron. Mittheilungen* de R. Wolf, et *Bulletin*, t. VII, p. 35.)

trigonométriques en développant et égalant les puissances homologues.

De bonnes Tables des puissances successives des nombres seraient très-utiles pour le calcul numérique de diverses fonctions qu'on peut développer en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes ou descendantes de la variable ; car il arrive parfois, pour certaines valeurs de la variable, qu'il faut aller jusqu'à quinze ou vingt termes pour avoir la valeur de la fonction exacte à sept décimales. Les Tables de logarithmes ne sont pas toujours suffisantes pour ces calculs, et c'est alors qu'on serait bien aise d'avoir sous la main une Table des puissances élevées.

M. Glaisher avait déjà calculé en double une Table des douze premières puissances des nombres depuis 1 jusqu'à 1000 ; dès qu'elle aura été calculée une troisième fois et collationnée, on la fera stéréotyper pour la livrer à la circulation.

Des Tables des plus petits diviseurs des nombres ont été données par Burckhardt pour les trois premiers millions, puis récemment par Dase, pour le septième, le huitième et le neuvième million. Ce travail fut entrepris par le célèbre calculateur vers 1850, à l'instigation de Gauss, qui était d'avis qu'il fallait étendre les Tables des diviseurs jusqu'aux dix premiers millions. Un manuscrit contenant ces diviseurs pour le quatrième, le cinquième, le sixième million avait été déjà présenté à l'Académie des Sciences de Berlin par Crelle ; il ne restait donc alors qu'à compléter le travail par les quatre derniers millions. Dase est mort en 1862 avant d'avoir achevé sa tâche ; le manuscrit de Crelle dort encore dans les cartons de l'Académie. Il paraît d'ailleurs que Burckhardt a laissé un travail analogue. L'existence de ces deux manuscrits a peut-être empêché les calculateurs de bonne volonté de combler la lacune qui existe encore dans les Tables des diviseurs : c'est ainsi qu'un manuscrit qu'on ne publie pas peut devenir un obstacle au progrès.

L'histoire des Tables des sinus, tangentes et sécantes est fort curieuse. Les premières lignes trigonométriques, déjà employées par les anciens, étaient les cordes ; on trouve une Table des cordes chez Ptolémée ; mais la division sexagésimale y est appliquée au rayon aussi bien qu'à la circonférence ; on prend pour unité l'arc de 60 degrés, dont la corde est égale au rayon. Ainsi la corde de l'arc de 90 degrés a pour valeur $84^{\circ}51'10''$, le rayon étant égal

à 60 degrés. Les Tables des sinus calculées par Purbach et par Regiomontanus au xve siècle ne paraissent pas avoir été imprimées. D'après de Morgan, la première Table de ce genre qui ait été imprimée est une Table publiée avant 1500, sans nom d'auteur.

Regiomontanus a fait paraître en 1504 sa Table des tangentes, puis Rheticus en 1551 un Canon complet des six rapports des côtés d'un triangle rectangle. Une Table de tangentes s'appelait alors *Tabula fœcunda,* une Table des sécantes *Tabula benefica* ou *fœcundissima.* En 1596, 20 ans après la mort de Rheticus, parut son grand Canon trigonométrique intitulé : *Opus palatinum*, où les valeurs naturelles des six rapports sont données avec dix décimales, de dix en dix secondes ; puis, en 1613, Pitiscus publia les Tables des sinus calculées par Rheticus avec quinze décimales, dont il avait retrouvé le manuscrit à moitié pourri parmi les papiers du libraire qui avait édité l'*Opus palatinum.* Ces Ouvrages, avec l'*Arithmetica logarithmica* et la *Trigonometria artificialis* de Vlacq, sont les sources d'où dérivent les Tables modernes.

Parmi les auteurs qui ont raconté l'histoire de l'invention des logarithmes, quelques-uns, comme Hutton, ont accusé John Napier d'avoir passé sous silence la part d'initiative qui revient à Briggs dans l'introduction du système décimal à la place du système naturel ; d'autres, comme Mark Napier, diminuent Briggs et en font un simple calculateur. Le rapport de M. Glaisher rétablit la vérité sur ce point en montrant par des citations que Briggs et Napier ont eu, chacun de son côté, l'idée de ce perfectionnement, et que ces deux hommes sont restés, jusqu'à la mort de Napier, dans les relations les plus amicales, ce qui suffit à laver la mémoire de Napier de tout reproche.

On sait d'ailleurs que les logarithmes népériens ne sont pas tout à fait les mêmes que ceux que l'on appelle aujourd'hui logarithmes *hyperboliques* ou *naturels,* et qui ont pour base le nombre $e = 2{,}71828\ldots.$ Les deux systèmes sont liés l'un à l'autre par la relation suivante :

$$e^{\text{log nat.}} = 10000000\, e^{-\frac{\text{log nép}}{10000000}}$$

ou bien

$$\text{log nép. } x = 10000000\,(\text{log nat. } 10000000 - \text{log nat. } x).$$

Quoique le nom de Juste Byrg ou Bürgi ne soit pas passé sous silence, M. Glaisher ne donne ni le titre de son Ouvrage (publié à Prague en 1620), ni aucune indication sur son système. Bürgi n'emploie pas le mot de *logarithmes*; mais ses « nombres rouges » peuvent être considérés comme formant un système de logarithmes dont la base serait le nombre 1,0001, de sorte que

$$\log \text{Bürgi} = \log \text{nat.} \times 10000,49999166\ldots,$$

et

$$\log \text{Bürgi}\, 10 = 23027,00220\ldots.$$

Il est bien entendu d'ailleurs que les droits de Neper au titre d'inventeur des logarithmes sont hors de toute contestation. Comme Archimède avait trouvé dans les progressions numériques le moyen de compter les grains de sable que peut contenir la sphère des étoiles, ainsi le « baron écossais » y a vu celui de nous libérer de l'écrasant labeur des divisions et des multiplications, et il a facilité dans une étonnante mesure les progrès de l'intelligence humaine.

Les Tables de logarithmes à quatorze décimales de Briggs, réduites à dix décimales et complétées par Adrien Vlacq, sont la source où Vega a puisé son *Thesaurus*, publié en 1794. Cependant à ce moment la France possédait déjà les fameuses Tables du Cadastre, calculées en double sous la direction de Prony, « le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui eût jamais été exécuté ou même conçu ». Il en existe deux exemplaires manuscrits, formant chacun 17 volumes in-folio, dont l'un est déposé aux Archives de l'Observatoire de Paris, l'autre à la Bibliothèque de l'Institut. M. Lefort en a donné une description détaillée en 1858, dans les *Annales de l'Observatoire*. En 1820, le Gouvernement anglais offrit, paraît-il, de faire la moitié des frais d'impression, mais cette offre ne fut point acceptée.

Parmi les publications récentes les plus importantes, il faut citer les Tables de M. Sang (1871), qui donnent les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 1000 avec dix décimales, et depuis 20000 jusqu'à 200000 avec sept décimales, disposition qui offre de grands avantages au point de vue des interpolations.

Les premières Tables logarithmiques des sinus et tangentes sont celles de Gunter (1620), qui ont sept décimales, puis viennent la *Trigonometria Britannica* de Briggs (1633), qui donne les loga-

rithmes des sinus, etc., avec quatorze décimales pour chaque centième de degré, et la *Trigonometria artificialis* de Vlacq, qui les donne avec dix décimales de 10 en 10 secondes.

Il faut ensuite mentionner les Tables de Michael Taylor (1792), de Bagay (1829) et de Shortrede (1844), qui toutes sont à sept décimales et vont de seconde en seconde. Les Tables trigonométriques du Cadastre ont été calculées pour la division décimale du quart de la circonférence.

Sans l'apparition des Tables de Vlacq, il est probable que la division décimale du degré ordinaire, inaugurée par Briggs, eût prévalu. M. Glaisher exprime l'espoir qu'on y reviendra, et que ce système, qui offre tant d'avantages, sera un jour définitivement adopté; « car il faut tenir pour certain », dit-il, « que la grandeur du degré ne sera jamais changée ». Selon le rapporteur, le centième du quart de la circonférence est une unité tout aussi arbitraire que le degré nonagésimal, et la substitution de l'un à l'autre n'aurait que des inconvénients, tandis que la division décimale du degré, en nous débarrassant des minutes et secondes, nous procurerait tous les avantages d'un véritable système décimal. Il nous semble cependant que le quart de la circonférence, pris comme unité, mérite la préférence dès qu'on dépasse 90 degrés, comme dans la plupart des calculs de la Mécanique céleste. Des Tables construites suivant la division naturelle du quadrant, laquelle est sans aucun doute la division décimale, serviraient aux astronomes calculateurs (qui n'empruntent que très-peu de données aux recueils d'observation, et se bornent à opérer sur un petit nombre d'angles donnés), aux mathématiciens purs, aux ingénieurs, aux arpenteurs. Toutes les personnes sans exception qui en ont fait l'essai y ont trouvé de très-grands avantages, et notamment une réelle économie de temps, ce qui entraîne toujours comme conséquence une diminution des erreurs de calcul. Une question aussi capitale eût d'ailleurs mérité d'être discutée à fond dans le Rapport, au lieu d'être tranchée en quelques lignes, au bas d'une page.

Il est digne d'être noté que la division décimale du degré avait été proposée par Simon Stevin longtemps avant Briggs, dans son célèbre Traité de *la Disme*, où il expose l'invention des fractions décimales (1585). Voici le passage qui renferme cette proposition :

« ARTICLE V. — *Des computations astronomiques.* — Aians les

anciens astronomes parti le circle en 360 degrez, ils voioient que les computations astronomiques d'icelles, avec leurs partitions, estoient trop laborieuses, pourtant ils ont parti chasque degré en certaines parties, et les mesmes autrefois en autant, etc., à fin de pouuoir par ainsi tousiours operer par nombres entiers, en choisissans la soixantiesme progression, parce que 60 est nombre mesurable par plusieurs mesures entières, à sçauoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 ; mais, si l'on peut croire l'expérience (ce que nous disons par toute reuerence de la venerable antiquité et esmeu avec l'vmilité commune), certes la soixantiesme progression n'estoit pas la plus commode, au moins entre celles qui consistoient potentiellement en la nature, ains la dixiesme, qui est telle : Nous nommons les 360 degrés aussi *commencemens,* les dénotans ainsi : 360 $(^{0})$, et chascun degré ou 1 $(^{0})$ se diuisera en dix parties égales, desquelles chascune fera 1 $(^{1})$, puis chasque 1 $(^{1})$ en 10 $(^{2})$, et ainsi des autres, comme le semblable est faict par plusieurs fois ci-deuant ».

Les logarithmes logistiques ou proportionnels sont des logarithmes de certains rapports ; ce sont des logarithmes ordinaires qu'on a retranchés d'un nombre constant. Les logarithmes d'addition et de soustraction, dont la première idée est due à Leonelli (1802), ont été vulgarisés par Gauss, et on les a modifiés de bien des manières. Il est à regretter que le Rapport ne discute pas la disposition plus ou moins convenable adoptée par les divers auteurs ; celle de la *fine Table of Gaussian Logarithms* de Wittstein (p. 78 du Rapport) est la moins bonne de toutes.

Notons encore que les Tables de Babbage, si vantées pour leur correction, renferment environ 250 fautes sur la dernière figure, dans la partie à 8 décimales (à la fin), empruntée de confiance à Callet, qui a calculé avec peu de soin les logarithmes de 102000 à 108000. Ces fautes ont été reproduites dans le Recueil de Vega-Hülsse (où elles se trouvent encore aujourd'hui) et dans les Tables de Köhler, où elles ont été ensuite corrigées. C'est M. Hoüel et M. Lefort qui les ont signalées les premiers et corrigées d'après les Tables du Cadastre.

En 1863, M. Oliver Byrne a fait une curieuse tentative pour remplacer les logarithmes par un autre système de nombres qu'il appelle *Dual Logarithms* et dont il a publié des Tables. Un

« nombre dualistique (*Dual Number*) de l'échelle ascendante » est un produit formé par les puissances entières des facteurs :

$$1,1\;;\; 1,01\;;\; 1,001\;;\; \ldots.$$

On se contente d'écrire les exposants précédés du signe $\leqq$, de sorte que

$$\leqq 6,\, 9,\, 7,\, 6 = (1,1)^6\,(1,01)^9\,(1,001)^7\,(1,0001)^6.$$

Quand tous les exposants, sauf le dernier, sont égaux à zéro, on a ce que M. Byrne appelle un *logarithme dualistique*. Il s'arrête à huit facteurs; ses logarithmes dualistiques ont par conséquent sept zéros avant le chiffre qui les caractérise. La branche descendante est formée par les produits des puissances de facteurs, tels que

$$0,9,\quad 0,99,\quad 0,999,\quad \ldots.$$

dont on écrit les exposants suivis du signe $\overline{\overline{<}}$, et ainsi de suite.

Ces citations suffiront pour faire comprendre l'intérêt que présente le Rapport du Comité des Tables, et le service que la publication de ce travail a rendu à la Science. Ajoutons quelques mots sur les Tables dont la construction et l'impression ont été commencées.

Les *Tables des fonctions de Legendre* donnent les valeurs exactes des sept premiers $P^n(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et l'unité, de centième en centième. On a

$$P^1 = x,\quad P^2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),\quad \ldots,$$
$$P^7 = \frac{1}{16}(429\,x^7 - 693\,x^5 + 315\,x^3 - 35\,x).$$

Ces Tables ont été calculées en double, par M. W. Barrett Davis et par les calculateurs placés sous les ordres de M. Glaisher. Elles seront publiées avec une introduction de M. Cayley.

Les *Tables des fonctions elliptiques* donneront les valeurs des quatre fonctions ϑ et leurs logarithmes à huit décimales pour les arguments

$$x = \quad 1^\circ,\quad 2^\circ,\ \ldots,\quad 90^\circ,$$
$$k = \sin 1^\circ,\ \sin 2^\circ,\ \ldots,\ \sin 90^\circ.$$

Ces Tables, qui sont à double entrée, renferment par conséquent

8 nombres pour chacun des 8100 arguments, en tout 64800 nombres. Huit calculateurs ont été employés à ce travail sous la direction de M. James Glaisher et du Rapporteur; on espérait qu'elles seraient achevées dans le courant de l'année 1874. Elles seront précédées d'une introduction dans laquelle MM. Cayley, Smith, Thomson et Stokes exposeront les usages variés auxquels se prêtent les fonctions elliptiques. « La publication de ces Tables », dit M. Glaisher, « ouvrira aux applications pratiques une vaste et fertile province du domaine de l'Analyse. »

Il faut regretter qu'on n'ait pas adopté, pour ces Tables, la division décimale du quadrant, qui en aurait beaucoup facilité l'usage. Au reste, l'emploi de l'ancienne division n'est pas le seul inconvénient qu'elles offrent. Il est à craindre que ces Tables à double entrée ne soient d'un usage peu commode, l'interpolation de pareilles Tables étant plus difficile que le calcul direct à l'aide des formules que l'on possède maintenant. Ce qui serait très-utile, ce seraient des Tables à simple entrée, donnant les valeurs de K, E, $q, \ldots$, en fonction du module; avec cela et de bonnes Tables des fonctions hyperboliques, le calcul des fonctions ϑ se ferait probablement dans tous les cas avec presque autant de rapidité que la recherche d'un nombre par interpolation simple. R. Radau.

OUVRAGES OMIS DANS LE RAPPORT DU COMITÉ DES TABLES.

Bürgi (Jobst). — *Arithmetische und geometrische Progress Tabulen, sambt gründlichen Unterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen und verstanden werden sol.* — Gedruckt in der alten Stadt Prag, im Jahr 1620. — In-4°, de 7 $\frac{1}{2}$ feuilles. (Cité par Kästner. Les nombres sont imprimés en noir, les logarithmes en rouge. Voir à ce sujet un Mémoire de M. Gieswald, publié vers 1856 dans l'*Archiv* de Grunert, et cité à la page 71 du Rapport).

Baudusson. — *Le Rapporteur exact* ou *Table des cordes*, etc. 4e édition. — Paris, 1861.

Bouché. — *Notice sur les usages d'un nouveau système de logarithmes*. In-8°, avec une planche. — Angers, 1859. (Log. graphiques.)

Carr (Rev. John). — *A Synopsis of Practical Philosophy*. — London, 1843.

Noel Durret. — *Tabulæ Richelianiæ*, 1641. (Log. népériens.)

Étienne. — *Tables des racines carrées*, 1852.

Gossart. — *Table des carrés de 1 à 100 millions, au moyen de laquelle on obtient des produits exacts*, etc., 1865.

Hertzer. — *Mathematische Tabellen.* — Berlin, 1864.

Hoüel. — *Recueil de formules et de Tables numériques.* In-8°. — Paris, 1866. (Contient 19 Tables de logarithmes et d'autres fonctions telles que les fonctions hyperboliques, elliptiques, etc., et une excellente Introduction; le Rapporteur y aurait trouvé d'utiles renseignements et l'accomplissement de quelques-uns des *desiderata* qu'il signale.)

Küster. — *Tabelle der Sinus und Cosinus,* etc. In-fol. — Mühlhausen, 1868.

Le Besgue. — *Table des plus petits diviseurs de* 1 *à* 215000. — *Tables d'indices* pour les nombres premiers < 200.

Oyon. — *Tables de multiplication.* 2 vol. in-4°. 4e édition. — Paris, 1864.

Prestet. — *Éléments de Mathématiques,* 1689. (Log. de 1 à 20000.)

Schweizer. — *Quadrattafeln.* — Mitau, 1862.

Tables de logarithmes. A 27 décimales : Fédor Thoman, 1867.

A 7 décimales : Caillet, 1848; Croizet; Luvini, 1865; Matzek, 1861; Querret, 1830; Vega (1re édition), 1783.

A 6 décimales : Bouguer, Bezout; Caillet, 1858, 1872; Guépratte; Hierl, 1851; Marie et Lalande, 1760; Plauzoles, 1809, 1830; Queipo, 1863, 1876; Rühlmann (7e édition), 1865; Stampfer, 1852.

A 5 décimales : August, 1846 (6e édition, 1865); Bourget et René, 1864; Delagrive, 1806; F.-G. Gauss, 1870; Gernerth, 1866; Hahn, 1823; Keith, 1826; Ligowski, 1867; Lukas, 1860; Lutter, 1866; Meldola, 1840; Midy (*Tables prestinventives*), 1830; Nell, 1866; Oeltzen (antilogarithmes), 1866; Picarte; de Prasse et Mollweide, 1821; Westphal, 1821; Wittstein, 1859; R. Wolf, 1860.

A 4 décimales : Hoüel, 1866; Schoder, 1869; Wittstein; Wild; Zech, 1864.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt (¹).

T. LXXX; 1875.

Kowalevsky (Sophie von). — *Sur la théorie des équations aux différences partielles.* (32 p.)

Mme de Kowalevsky, native de Russie, ayant fini ses études de Mathématiques auprès de M. Weierstrass, a publié ce Mémoire comme dissertation inaugurale pour obtenir par là le grade de

(¹) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 176.

docteur auprès de la Faculté de Philosophie de l'Université de Göttingue [1].

Au commencement de ce savant Mémoire, on trouve les théorèmes fondamentaux sur l'existence de *séries de puissances* (Potenzreihen), qui satisfont comme intégrales aux équations différentielles ordinaires, théorèmes empruntés, dans la forme où ils sont énoncés, aux cours de M. Weierstrass. Les recherches de Mme de Kowalevsky ont pour objet de répondre à la question, si les théorèmes qui servent de base à la théorie des équations différentielles ordinaires admettent une généralisation pour les équations algébriques aux différences partielles.

Le premier paragraphe traite de n équations différentielles linéaires homogènes contenant n fonctions indéterminées et $r+1$ variables indépendantes. Le deuxième s'occupe d'une équation différentielle d'ordre n contenant une fonction indéterminée φ et $r+1$ variables indépendantes. La recherche se restreint d'abord au cas dit *normal*, où une quelconque des dérivées d'ordre n, soit $\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n}$, est réellement contenue dans l'équation différentielle. Le troisième paragraphe montre la réduction du cas général au cas normal, et enfin le quatrième roule sur le problème général de déterminer m fonctions analytiques $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ des $r+1$ variables $x, x_1, \ldots, x_r$, quand on se donne un système de m équations algébriques aux différences partielles, qui est de l'ordre $n_\varkappa$ par rapport à $\varphi_\varkappa$.

Mme de Kowalevsky prouve qu'en général il est possible de trouver des développements en séries de puissances; cependant il y a des exceptions et des précautions dont il faut user, mais que nous ne pourrions pas détailler sans dépasser de beaucoup les limites d'un simple compte rendu.

Combescure (Éd.). — *Sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles.* (20 p.; fr.)

Ce Mémoire comprend six paragraphes : § 1. Remarques géné-

---

(1) Du temps de la publication (1874), il n'était pas encore nécessaire d'y passer un examen oral; il suffisait d'avoir fait des études régulières et de présenter un Mémoire scientifique. Depuis, les règlements de cette Université ayant été changés, la promotion *in absentia* n'y est plus permise.

rales. (Sur un système d'équations différentielles du premier ordre.) § 2. Cas des équations linéaires. Étant donnée une intégrale d'un système d'équations linéaires homogènes et une solution particulière de ce système, on peut en déduire le tout ou partie des intégrales de ce système. § 3. Problème de Géométrie : « Étant donnée une courbe (x_1, x_2, x_3), située sur une surface du second ordre, aussi donnée,

$$\frac{x_1^2}{a_1^2}+\frac{x_2^2}{a_2^2}+\frac{x_3^2}{a_3^2}=1,$$

trouver une autre courbe (X_1, X_2, X_3), située sur la même surface, telle que ses tangentes soient respectivement parallèles aux tangentes successives de la première. » § 4. Problème de Mécanique : « Détermination des cosinus des angles que font trois axes rectangulaires mobiles avec trois axes rectangulaires fixes, quand on connaît en fonction du temps les composantes de rotation du système autour de chacun des axes mobiles. » § 5. Problème d'Analyse : « Le système d'équations différentielles proposé est le suivant :

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = h,$$
$$\frac{dX_1}{a_1}=\frac{dX_2}{a_2}=\frac{dX_3}{a_3}=\frac{dX_4}{a_4},$$

a_1, a_2, a_3, a_4, h étant des fonctions données quelconques d'une variable indépendante t. » § 6. Digression relative à un système particulier d'équations algébriques.

ROSANES. — *Sur la transformation d'une forme quadratique en elle-même.* (21 p.)

La généralisation du problème de la substitution orthogonale conduit au problème traité par M. Hermite, tome LXVII de ce Journal, et qui consiste à déterminer les coefficients d'une substitution linéaire, de sorte qu'une forme générale quadratique $f(x)$ soit transformée en elle-même, soit en $f(X)$. Dans le Mémoire que M. Hermite a consacré à cet objet, il a réussi à établir pour une forme ternaire $f(x)$ les neuf coefficients de substitution, formés des six coefficients de $f(x)$ et de trois constantes arbitraires. C'est pourquoi M. Rosanes désigne une telle substitution sous le nom de *substitution d'Hermite* (*Hermite'sche Substitution*). Mais, tandis que le problème de la substitution orthogonale mène à des équations où entrent les seuls coefficients c_k^i de la substitution, on ne rencontre

dans la substitution d'Hermite, au premier abord, que des relations entre les coefficients c_k^i et ceux de la forme proposée. Cependant, après avoir remarqué que l'équation, dite *fondamentale*, de la substitution devient réciproque, on entrevoit la possibilité d'établir une détermination de la notion de substitution d'Hermite indépendamment de la forme quadratique individuelle.

Ayant trouvé ce point de vue, M. Rosanes représente la substitution qui transforme une forme quadratique en elle-même, sous une forme qui la caractérise distinctement et qui en fait reconnaître aisément la propriété essentielle. De plus, il montre que le système des coefficients c_k^i, qui ne sont pas indépendants les uns des autres, admet une représentation simple, non pas au moyen du nombre nécessaire des grandeurs indépendantes, mais par un nombre supérieur à celui-là. Enfin, dans la dernière Partie du Mémoire, on trouve une méthode développée pour résoudre le problème : « Étant donnée une substitution d'Hermite, déduire d'une forme adjointe $f(x)$ successivement d'autres formes qui puissent être transformées aussi en elles-mêmes par cette substitution ».

Gundelfinger (S.). — *Sur le système simultané de trois formes quadratiques ternaires.* (13 p.)

Ce Mémoire développe d'abord les résultats obtenus par M. Hermite (t. LVII du même Journal), sur la représentation typique de trois formes quadratiques ternaires, résultats qui n'avaient pas encore été démontrés jusqu'à présent. Pour cela, les coefficients de la forme cubique ternaire dont les dérivées partielles représentent les formes données quand on y introduit certaines nouvelles variables sont exprimés d'une manière simple par onze invariants fondamentaux. Alors M. Gundelfinger étudie, à l'aide de la représentation typique, les relations entre les formes du système, et il fait voir que presque tous les théorèmes relatifs à des formes cubiques ternaires se transforment immédiatement en d'autres sur trois formes quadratiques; par exemple, il s'ensuit que « tous les invariants du système, qui jouissent de la propriété des combinants, sont des fonctions entières de deux d'entre eux ». A la fin on rencontre quelques applications aux réseaux de surfaces du second ordre.

Schendel (L.). — *Sur la théorie des fonctions sphériques.* (9 p.)

Définition des fonctions de Laplace au moyen de dérivées, et développement rapide des formules principales.

SCHENDEL (L.). — *Sur un développement en fraction continue.* (2 p.)

MATHIEU (Ém.) — *Mémoire sur les inégalités séculaires des grands axes des orbites des planètes.* (31 p.; fr.)

« Laplace démontra d'abord que les grands axes ne sont soumis à aucune variation séculaire, si l'on néglige les termes du troisième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons supposées très-petites. Lagrange prouva ensuite que cette proposition a lieu, quelque loin que l'on pousse l'approximation, et par conquent aussi pour des excentricités et des inclinaisons arbitraires.

» Toutefois, les démonstrations de Laplace et Lagrange supposent encore que l'on néglige les termes de la fonction perturbatrice multipliés par les carrés et les produits des masses. Poisson, dans le *Journal de l'École Polytechnique* (XVe Cahier), a ensuite démontré que le théorème est également vrai, quand on a égard aux termes de la fonction perturbatrice du second ordre par rapport aux masses....

» Maintenant que l'on sait que les grands axes des orbites des planètes ne sont soumis à aucune variation séculaire, quand on néglige les termes du troisième ordre par rapport aux masses perturbatrices, il reste à se demander si le théorème est encore vrai, lorsqu'on tient compte de tous les ordres suivants, et si par conséquent les valeurs des grands axes oscilleront éternellement autour d'une valeur moyenne, en admettant que le système planétaire ne soit dérangé par aucune cause extérieure.

» Dans le Mémoire qui suit, je ne suis pas parvenu à traiter entièrement cette question; mais, après avoir retrouvé le résultat obtenu par Poisson, je vais plus loin et je démontre que l'inverse du grand axe d'une planète n'est sujet à aucune inégalité séculaire, en ayant égard à tous les termes jusqu'au troisième ordre inclusivement.... »

STURM (R.). — *Suite des recherches sur les courbes gauches cubiques.* (22 p.)

Nous avons déjà signalé ce Mémoire (*Bulletin,* t. IX, p. 180), à l'occasion du premier travail de M. Sturm. En comptant d'une manière habile le nombre des courbes gauches cubiques déterminées par des éléments donnés, M. Sturm a obtenu les caractéristiques

dans différents cas remarquables : c'est pourquoi nous ajoutons ici le tableau où il a réuni les nombres trouvés par lui dans ses deux Mémoires.

Soient xP la condition signifiant que la courbe passe par x points; xs, qu'elle a x droites pour cordes; xl, qu'elle est rencontrée une fois par chacune des x droites; $x\pi$, qu'elle touche x plans; π^2, qu'il y a osculation entre elle et un plan; πl, qu'elle touche un plan sur une droite : alors le tableau suivant donne le nombre des courbes gauches cubiques qui satisfont aux conditions écrites dans les parenthèses :

	$(6\mathrm{P}) = 1,$	
$(5\mathrm{P}, 1s) = 1,$	$(5\mathrm{P}, 2l) = 5,$	$(5\mathrm{P}, 1l, 1\pi) = 10,$
$(4\mathrm{P}, 2s) = 0,$	$(4\mathrm{P}, 1s, 2l) = 4,$	$(4\mathrm{P}, 1s, 1l, 1\pi) = 8,$
$(3\mathrm{P}, 3s) = 1,$	$(3\mathrm{P}, 2s, 2l) = 4,$	$(3\mathrm{P}, 2s, 1l, 1\pi) = 8,$
$(2\mathrm{P}, 4s) = 1,$	$(2\mathrm{P}, 3s, 2l) = 6,$	$(2\mathrm{P}, 3s, 1l, 1\pi) = 12,$
$(1\mathrm{P}, 5s) = 1,$	$(1\mathrm{P}, 4s, 2l) = 9,$	$(1\mathrm{P}, 4s, 1l, 1\pi) = 18,$
$(6s) = 6.$	$(5s, 2l) = 20.$	$(5s, 1l, 1\pi) = 40.$
$(5\mathrm{P}, 2\pi) = 20,$	$(5\mathrm{P}, \pi^2) = 6,$	$(5\mathrm{P}, \pi l) = 3,$
$(4\mathrm{P}, 1s, 2\pi) = 16,$	$(4\mathrm{P}, 1s, \pi^2) = 3,$	$(4\mathrm{P}, 1s, \pi l) = 3,$
$(3\mathrm{P}, 2s, 2\pi) = 16,$	$(3\mathrm{P}, 2s, \pi^2) = 3,$	$(3\mathrm{P}, 2s, \pi l) = 2,$
$(2\mathrm{P}, 3s, 2\pi) = 24,$	$(2\mathrm{P}, 3s, \pi^2) = 6,$	$(2\mathrm{P}, 3s, \pi l) = 3,$
$(1\mathrm{P}, 4s, 2\pi) = 36,$	$(1\mathrm{P}, 4s, \pi^2) = 6,$	$(1\mathrm{P}, 4s, \pi l) = 6,$
$(5s, 2\pi) = 80.$	$(5s, \pi^2) = 21.$	$(5s, \pi l) = 7.$

JÜRGENS (E.). — *La forme des intégrales des équations différentielles linéaires.* (19 p.)

Par une nouvelle voie, M. Jürgens déduit les résultats obtenus par M. Hamburger dans un Mémoire dont nous avons rendu compte (*Bulletin*, t. V, p. 288). De plus, il examine la nature des équations différentielles d'ordre inférieur qui ont toutes leurs intégrales communes avec l'équation différentielle proposée. En même temps cette recherche fait voir la connexion intime qui existe, vu la présence de puissances du logarithme dans les intégrales, entre une équation différentielle et l'équation correspondante du multiplicateur.

PASCH. — *Sur la théorie du déterminant hessien.* (8 p.)

Si, au moyen d'une substitution linéaire, une forme homogène

peut être transformée en une autre qui ne dépend pas de toutes les nouvelles variables, il faut que le déterminant de la forme s'évanouisse identiquement; mais les recherches de Hesse (t. XLII et LVI du même Journal) n'ont pas montré l'inverse, c'est-à-dire jusqu'où la possibilité d'une telle transformation dépend de la propriété du déterminant de s'évanouir. Après avoir développé quelques relations qui se rapportent au déterminant hessien, M. Pasch décide la question pour les formes cubiques à trois ou quatre variables, en examinant tout à la fois les cas spéciaux qui s'y présentent.

Pasch. — *Note sur les déterminants formés de fonctions et des dérivées de ces fonctions.* (6 p.)

Démonstration purement algébrique du théorème connu :

« Si le déterminant des fonctions $f_1, \ldots, f_\lambda$,

$$D(f_1, \ldots, f_\lambda) = \Sigma \pm f_1 \frac{df_2}{dx} \frac{d^2 f_3}{dx^2} \cdots \frac{d^{\lambda-1} f_\lambda}{dx^{\lambda-1}}$$

s'évanouit pour toute valeur de x, tous les déterminants de l'ordre λ du système

$$\left|\begin{array}{ccccc} f_1 & \frac{df_1}{dx} & \frac{d^2 f_1}{dx^2} & \frac{d^3 f_1}{dx^3} & \cdots \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_\lambda & \frac{df_\lambda}{dx} & \frac{d^2 f_\lambda}{dx^2} & \frac{d^3 f_\lambda}{dx^3} & \cdots \end{array}\right|$$

s'annulent pour toute valeur de x. Généralisation du résultat. »

Frobenius (G.). — *Sur des équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales algébriques.* (11 p.)

Au commencement, M. Frobenius établit ce théorème : « Si toutes les intégrales d'une équation différentielle linéaire et homogène, à coefficients uniformes, sont des fonctions algébriques, elle possède une intégrale au moyen de laquelle toutes les autres peuvent être exprimées rationnellement. » Ce théorème donne lieu à la question inverse ou à ce problème : « Trouver toutes les fonctions y qui satisfassent à une équation différentielle de la forme proposée, lorsque les intégrales, n'étant pas toutes des fonctions algébriques, peuvent pourtant être exprimées rationnellement en y ». La recherche montre qu'une équation différentielle de la forme proposée est

algébriquement intégrable quand elle possède une intégrale au moyen de laquelle toutes les autres peuvent être exprimées rationnellement, à moins que cette intégrale n'ait une des deux formes caractérisées dans le Mémoire. Le résultat se prête à un énoncé élégant dans un cas important, savoir : « Si une équation différentielle linéaire *irréductible*, de la forme proposée et d'ordre supérieur au second, possède une intégrale à l'aide de laquelle toutes les autres peuvent être exprimées rationnellement, toutes les intégrales en sont des fonctions algébriques ».

Schellbach. — *Construction de la trajectoire d'un point attiré vers un point fixe d'après la loi de Newton.* (10 p.)

Après avoir développé d'une manière rapide les formules les plus importantes qui servent à intégrer les équations différentielles du mouvement planétaire, M. Schellbach donne cette construction très-élégante de l'orbite :

Soient F le point fixe attirant, C le point mobile attiré, k l'accélération imprimée par le point F au point C à l'unité de distance, v' la grandeur de la vitesse initiale, q' la longueur de la perpendiculaire abaissée de F sur la direction de la vitesse initiale passant par C. Tirez FC, coupez-en la longueur $\mathrm{FP} = g = \frac{k}{v'q'}$, faites $\mathrm{PV} = v'$ et normale à la direction de la vitesse initiale, et joignez FV; FV sera la direction du grand axe de la trajectoire; l'autre foyer F' se construira donc facilement. La courbe sera une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que le point V sera à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la périphérie d'un cercle décrit autour de F comme centre, avec FP comme rayon. D'ailleurs, la droite qui joint V à l'intersection R d'un rayon vecteur FR' (R' étant sur la trajectoire), c'est-à-dire VR, est tout à la fois la vitesse du point mobile lorsqu'il passe par le point R'.

Popoff. — *Sur le développement en une série d'exponentielles.* (1 p.; fr.)

Correspondance mathématique *entre Legendre et Jacobi.* (75 p.) Réimprimée dans le *Bulletin*, t. VIII, p. 287; t. IX, p. 38, 51 et 126.

Schwarz (H.-A.). — *Mélanges sur la question des surfaces minima.* (21 p.)

Ces mélanges sont une réimpression d'articles du *Vierteljahr-*

schrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Ils donnent dans dix articles les résultats auxquels est parvenu M. Schwarz par ses études sur différents points de la théorie des surfaces minima. M. Fiedler a ajouté un abrégé de ces recherches à l'édition allemande de la Géométrie à trois dimensions de M. Salmon : I. Démonstration de quelques théorèmes de M. Ossian Bonnet, qui sont intimement liés à la représentation conforme de ces surfaces. II. Formules générales pour les coordonnées d'une surface minimum. III. Surfaces minima qu'on engendre en déformant par la flexion une surface minimum donnée. IV. Aire de la surface d'un certain cône comparée à celle d'une partie de la surface minimum. V. Déterminer analytiquement une surface minimum passant par une ligne analytique donnée, et possédant en chaque point de cette ligne une normale donnée dont la direction varie tout le long de la ligne suivant une loi analytique donnée. Exemples. VI. Remarque historique sur le problème où une ligne fermée L est le contour d'une partie de la surface minimum qui ne présente pas de singularités en dedans de la ligne L. VII. Surfaces minima applicables à des surfaces de rotation. VIII. Surfaces minima qui contiennent un faisceau de lignes données. IX. Tracer sur une surface minimum donnée des contours fermés, tels que la partie renfermée soit elle-même un minimum entre toutes les surfaces qui passent par le contour. X. Sur le nombre de solutions du problème VI.

Schwarz (H.-A.). — *Sur les surfaces minima qui sont enveloppées par un faisceau de cônes du second ordre.* (14 p.)

Le Mémoire s'occupe d'abord de ce problème : « Déterminer toutes les surfaces minima qui sont enveloppées par un faisceau de cônes concycliques (c'est-à-dire dont les sections circulaires sont situées sur les deux mêmes faisceaux de plans parallèles) », et la seconde partie du travail prouve qu'il n'y a pas d'autres surfaces minima jouissant de la propriété d'être enveloppées par un faisceau de cônes du second ordre.

Meyer (O.-E.). — *Addition au Mémoire sur la théorie du frottement intérieur,* t. LXXVIII de ce Journal. (2 p.)

Frobenius (G.). — *Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires.* (17 p.)

Les intégrales d'une équation différentielle linéaire dont les coef-

ficients sont des fonctions analytiques uniformes dans le voisinage d'un point zéro sont de la forme

$$x^r[u_0(\log x)^k + u_1(\log x)^{k-1} + \ldots + u_k],$$

où $u_0, u_1, \ldots, u_k$ peuvent être développés suivant des puissances de x à exposants entiers positifs ou négatifs; ou bien les intégrales sont des agrégats linéaires de plusieurs expressions de cette forme. Les coefficients de ces séries n'ont été déterminés jusqu'à présent que lorsqu'ils contiennent seulement un nombre fini de puissances de la variable à exposants négatifs. C'est pourquoi de telles intégrales ont été nommées *régulières* par M. Thomé (*Journ.*, t. LXXV; *Bull.*, t. IV, p. 237). Après M. Fuchs, qui avait déjà entrepris l'étude des équations différentielles linéaires qui n'admettent que des intégrales régulières, M. Thomé avait étendu ses recherches aux équations différentielles qui parmi leurs intégrales en ont quelques-unes de régulières, et il était parvenu à des résultats remarquables. M. Frobenius avait un peu plus tard introduit la notion de l'irréductibilité dans la théorie des équations différentielles linéaires. Secondé par cette nouvelle idée, il reprend ici la question traitée par M. Thomé, et de là il réussit à déduire presque sans calcul quelques-uns des théorèmes de M. Thomé.

Sturm (R.). — *Addition aux recherches sur les courbes cubiques gauches.* (1 p.)

Remarque sur le droit de priorité.

Table des matières des tomes LXXI-LXXX. (10 p.)

T. LXXXI; 1876.

Thomé (L.-W.). — *Sur la théorie des équations différentielles linéaires* [suite (¹)]. (32 p.)

M. Thomé, dont les recherches antérieures sur les équations différentielles linéaires ont été publiées dans les tomes LXXIV-LXXVIII du même Journal, continue à en étudier les propriétés; en particulier il s'occupe maintenant de la question suivante : « Étant donnée une équation différentielle linéaire homogène à coefficients rationnels, à quelles conditions doit-elle satisfaire pour qu'elle contienne

(¹) *Voir* t. 78. — *Bulletin*, t. VII, p. 256.

les intégrales d'un autre d'ordre inférieur, à coefficients rationnels et qui ne possède que des intégrales régulières?» Ce qui fait le progrès essentiel du nouveau Mémoire comparé à celui du tome LXXVIII, c'est que l'équation différentielle cherchée peut avoir des points singuliers quelconques ([1]). M. Thomé réussit à établir ces résultats généraux :

Si, dans l'équation différentielle proposée, les indices caractéristiques ([2]) sont soumis à la seule condition de satisfaire à l'inégalité $0 \leqq h < m$, où h est le plus grand des indices, m l'ordre de l'équation différentielle, il ne peut exister qu'une équation différentielle d'ordre $m - h$ à coefficients rationnels et dont les intégrales, étant toutes régulières, soient comprises parmi celles de l'équation donnée. Le Mémoire actuel apprend à rechercher si cette équation différente existe et quelle elle est.

Toute la recherche tend à remplacer l'équation différentielle proposée

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = \mathrm{F}(y, x) = 0$$

par le système

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^{m-h} y}{dx^{m-h}} + p_1^{(h)} \frac{d^{m-h-1} y}{dx^{m-h-1}} + \ldots + p_{m-h}^{(h)} y = \mathrm{F}_{m-h}(y, x) = 0, \\ &\frac{d^h s}{dx^h} + g_1^{(m-h)} \frac{d^{h-1} s}{dx^{h-1}} + \ldots + g_h^{(m-h)} s = f_h(s, x) = 0, \end{aligned} \right.$$

ou bien à faire

$$(3) \qquad \mathrm{F}_m(y, x) = f_h(\mathrm{F}_{m-h}, x),$$

$\mathrm{F}_{m-h}(y, x)$ étant l'équation différentielle cherchée.

Pour découvrir les points singuliers de l'équation différentielle $\mathrm{F}_{m-h} = 0$ qui ne reviennent pas dans l'équation différentielle donnée $\mathrm{F}_m = 0$, l'auteur observe que ce sont des points *non essentiellement singuliers*, c'est-à-dire où les intégrales de l'équation différentielle restent toutes uniformes et finies; et que d'ailleurs, d'après un théorème de M. Fuchs (t. LXVIII du Journal), le pro-

---

([1]) Rappelons la définition des *points singuliers* dans la théorie des équations différentielles linéaires : ce sont les points du plan de construction où les coefficients de l'équation différentielle cessent d'être finis.

([2]) Voir *Bulletin*, t. IV, p. 238.

duit du premier coefficient de l'équation différentielle par $x - a$ devient pour $x = a$ un nombre entier négatif dans un point non essentiellement singulier. Si l'on décompose alors le coefficient $p_1^{(h)}$ en fractions simples, soit $\sum_1^\lambda \frac{\alpha_s}{x - a^s}$ la partie de ce coefficient qui provient du point singulier cherché, alors le produit $\prod_{s=1}^{s=\lambda} (x - a_s)^{-\alpha_s}$ devient une fonction entière et rationnelle.

Pour un point singulier dont l'indice caractéristique h est supérieur à zéro, le développement formel de la grandeur $p_1^{(h)}$ peut se déduire des m équations pour les coefficients p, $p^{(h)}$ et $g^{(m-h)}$, lesquelles résultent de l'équation (3) quand on égale les coefficients des dérivées de même ordre; on peut donc en tirer la détermination des coefficients de la fonction entière et rationnelle que nous venons de mentionner. $p_1^{(h)}$ ayant été ainsi complétement déterminé, les autres quantités $p^{(h)}$ et $g^{(m-h)}$ se déduisent d'un certain nombre des m équations d'une seule manière. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution du problème soit possible demande enfin que les valeurs trouvées pour les $p^{(h)}$ et les $g^{(m-h)}$ satisfassent aussi aux autres de ces équations.

Pochhammer (L.). — *Contribution à la théorie de la flexion du cylindre à base circulaire.* (29 p.)

Le problème de la flexion d'un cylindre, après avoir été traité par beaucoup d'éminents géomètres, a été résolu dans un certain sens par Navier; M. de Saint-Venant a complété les formules de son célèbre prédécesseur, et les valeurs qu'il établit pour les déplacements sont, en effet, des solutions des trois équations aux différentielles partielles qui régissent les déformations des corps solides à élasticité constante. Enfin M. Kirchhoff a développé la solution exacte pour un cylindre infiniment mince.

Actuellement M. Pochhammer a repris ce problème, parce que les hypothèses d'où Navier est parti dans sa déduction n'ont pas été vérifiées par un exemple, qui, tout en se bornant à des dimensions finies, ait été traité par l'Analyse mathématique. Le cas du cylindre solide qu'il a choisi pour sujet du présent Mémoire permet d'obtenir, par l'intégration complète des trois équations différentielles de l'élasticité, les déformations que produit la flexion à

l'intérieur. Les calculs confirment en général la théorie de Navier, en montrant que ses hypothèses constituent une approximation de premier ordre.

Ce problème spécial a été déjà soumis à l'Analyse dans un travail de Lamé et Clapeyron (*Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes. — Journal de Crelle,* t. 7); cependant on n'y trouve que les idées générales qui président au calcul, et les lois de la flexion n'y ont point été développées. Dans ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité,* Lamé n'a pas reproduit sa solution, et il semble que la complication inhérente à sa première manière de traiter le problème l'ait empêché d'y revenir plus tard. Toutefois il faut avouer que les travaux préparatoires étaient donnés par le Mémoire de Lamé et Clapeyron; la méthode d'intégration qu'a suivie M. Pochhammer se rattache à celle qui a été développée par Lamé à propos de la question de l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques.

M. Pochhammer divise son sujet en trois Parties : la première comprend l'intégration générale; dans la deuxième, il détermine les constantes arbitraires par les forces données qui sollicitent la surface du solide; la troisième s'occupe de formules d'approximation. Pour plus de facilité, il décompose le problème en trois autres plus simples. Il considère les cas où la surface du cylindre est sollicitée seulement : 1° par des forces normales; 2° par des forces tangentielles et normales à l'axe du cylindre; 3° par des forces tangentielles et parallèles à l'axe. Le premier de ces trois problèmes spéciaux explique déjà les phénomènes (proprement dits) de flexion; car les formules d'approximation du deuxième deviennent, abstraction faite d'une simple torsion, identiques à celles du premier, et le troisième ne fournit qu'une flexion secondaire. C'est pourquoi les calculs approchés de la troisième Partie ont été limités au premier problème. Le système des expressions obtenues par là pour les déplacements est analogue à celui qu'a développé M. de Saint-Venant pour le cylindre à section normale circulaire; mais les fonctions qui y entrent sont plus générales. Enfin deux exemples ont été traités où la ligne élastique se réduit, dans une première approximation, aux paraboles connues du troisième et du quatrième ordre.

Oberbeck (L.). — *Sur les mouvements permanents d'un fluide quand on a égard au frottement intérieur.* (19 p.)

Les équations différentielles générales de l'Hydrodynamique qui

ne négligent pas le frottement intérieur ont été employées jusqu'à présent presque exclusivement lorsqu'il s'agissait de résoudre les problèmes de déterminer par l'expérience les valeurs numériques des constantes de frottement. En général, c'est en renonçant au frottement intérieur qu'on a abordé les nombreuses questions de l'Hydrodynamique qui ont été examinées. Parmi ces problèmes, il y a un certain genre de mouvements qu'on peut désigner sous le nom de *courants influencés* par des corps solides dans le fluide. Ces problèmes ont été l'objet des spéculations d'éminents géomètres allemands, tels que Dirichlet, Clebsch, Kirchhoff. M. Oberbeck a trouvé qu'une partie de ces problèmes reste accessible à l'Analyse quand on part des équations différentielles générales.

Si le mouvement d'un fluide, abstraction faite du frottement, admet un potentiel de la vitesse, et que ce potentiel soit déterminé, il faut seulement, pour introduire le frottement, ajouter aux composantes de la vitesse déjà trouvées les intégrales des équations différentielles hydrodynamiques qui correspondent aux mouvements de tourbillon et qui ont été traitées par MM. Helmholtz et Stefan. Alors les fonctions arbitraires qui y entrent peuvent souvent être déterminées à l'aide du potentiel de la vitesse, par les conditions à la surface.

De cette manière, l'auteur a traité quelques problèmes d'Hydrodynamique où, quand on ne tient pas compte du frottement, les composantes de la vitesse peuvent être exprimées par les dérivées d'une même fonction. Cette fonction a été supposée indépendante du temps, c'est-à-dire que l'on suppose le mouvement devenu permanent. La question posée est toujours la suivante : « Étant données les hypothèses sur le potentiel de la vitesse et sur les limites du fluide, quelles quantités faut-il ajouter aux composantes primitives de la vitesse quand on veut introduire aussi le frottement? » Parmi les différents problèmes du Mémoire, signalons surtout l'exemple d'une sphère fixe dans un fluide illimité.

Thomae (J.). — *Sur la réduction de l'intégrale elliptique* $\int (\sin \operatorname{am} u)^{2r} du$. (12 p.)

M. Thomae s'est proposé de chercher une formule pour l'intégrale $\int \frac{\frac{1}{2} x^r dx}{\sqrt{x(1-x)(1-kx)}}$ analogue à la formule pour $\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{1-x^2}}$ qu'on trouve dans tous les Cours d'Analyse. Mais il découvre qu'il n'est

guère possible d'établir des formules finies, parce que les séries hypergéométriques qui entrent dans les formules de réduction ne se prêtent pas bien à une expression simple au moyen de leurs arguments. Néanmoins, quoique ainsi l'évaluation numérique des intégrales ne soit pas avancée par ses formules, M. Thomae les croit assez intéressantes pour les communiquer : car elles démontrent l'importance de l'intégration des formules récurrentes, et leurs coefficients sont en même temps les modules de périodicité d'intégrales elliptiques de seconde espèce. D'ailleurs l'auteur cherche à s'approcher d'expressions finies en donnant les coefficients comme numérateurs des fractions réduites d'une fraction continue.

Hermite (Ch.). — *Extrait d'une lettre à M. Borchardt. Sur les nombres de Bernoulli.* (3 p.; fr.)

Boltzmann (L.). — *Remarque relative au Mémoire de M. O.-E. Meyer sur le frottement intérieur.* (1 p.)

Fuchs (L.). — *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent des intégrales algébriques, et sur une nouvelle application de la théorie des invariants.* (46 p.)

Voici le point de départ du nouveau Mémoire de M. Fuchs : Soient y_1, y_2 les termes d'un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle proposée; toute autre intégrale en sera une fonction linéaire homogène à coefficients constants; donc, si μ est une intégrale algébrique quelconque, toute fonction symétrique des différentes valeurs qu'admet μ sera une forme binaire des deux quantités y_1, y_2. Cette forme binaire est une fonction rationnelle de la variable indépendante z. Toutefois, il se peut qu'elle soit une puissance d'une autre forme binaire; par conséquent, il faut considérer généralement les formes en y_1 et y_2 qui représentent une racine d'une fonction rationnelle de z. Nous en désignerons le complexe par Φ.

Si une racine d'une fonction rationnelle satisfait à l'équation différentielle, la forme linéaire est, de toutes les formes Φ, celle de l'ordre le moins élevé; donc, dans le cas général, il faut rechercher l'ordre le moins élevé N que puisse avoir une formule du complexe Φ.

Or, si z décrit des contours fermés, y_1 et y_2 se transforment en des fonctions linéaires homogènes et à coefficients constants de y_1, y_2; partant, les différentes valeurs qu'obtient une forme en y_1 et y_2 par suite de ces mouvements résulteront de certaines sub-

stitutions linéaires opérées sur y_1, y_2. Cela étant, M. Fuchs démontre que les covariants d'une forme du complexe Φ représentent eux aussi des racines de fonctions rationnelles; d'où il s'ensuit que les covariants de la forme de $N^{ième}$ ordre dont les ordres sont inférieurs à N doivent tous s'évanouir identiquement. Il serait donc facile d'effectuer la détermination du nombre N, si l'on possédait la solution du problème, d'indiquer l'espèce des formes binaires de $m^{ième}$ ordre dont les covariants d'ordres inférieurs à m s'évanouissent tous identiquement; mais, comme il n'en est pas ainsi, l'auteur prend le chemin suivant pour déterminer N.

Parmi toutes les racines d'une équation algébrique irréductible, nommons *système radical réduit* le système de celles dont le quotient n'est pas constant; et désignons par *forme première* toute forme du complexe Φ qui se compose des termes d'un tel système comme facteurs. Alors il en résulte que la forme de $N^{ième}$ ordre et en même temps son covariant hessien représentent des formes premières. Et la forme que prend le *covariant hessien du covariant hessien* de la même forme amène à conclure que le nombre N n'est jamais supérieur à *douze*. Si l'on réduit encore davantage, on trouve qu'il ne faut attribuer à N qu'une des valeurs 2, 4, 6, 8, 10, 12; donc, si l'équation différentielle doit avoir une intégrale algébrique, cette intégrale (c'est-à-dire une forme de premier ordre en y_1, y_2), ou une forme de ces mêmes intégrales dont le degré égale un des nombres 2, 4, 6, 8, 10, 12, est la racine d'une fonction rationnelle. L'inverse de cette proposition a aussi lieu, à l'exception du cas de $N = 2$.

Pour reconnaître s'il y a des formes qui représentent des racines de fonctions rationnelles, l'auteur prend deux voies différentes. La première nous conduit à la question de savoir si une racine d'une fonction rationnelle satisfait à une équation différentielle à coefficients rationnels; car on découvre que toute forme en y_1, y_2 de l'ordre m satisfait à une certaine équation différentielle linéaire à coefficients rationnels de l'ordre $m+1$, et de là on tire la condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle donnée possède des intégrales algébriques. Il faut, en général, qu'une certaine équation différentielle linéaire à coefficients rationnels, dont l'ordre n'est pas supérieur à 12, soit satisfaite par la racine d'une fonction rationnelle. La question de savoir si la racine d'une fonction rationnelle satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficients ration-

nels se réduit au problème élémentaire de juger si un système d'équations linéaires a des solutions finies. Au reste, M. Fuchs montre comment on peut parvenir à ce système d'équations linéaires sans établir en effet l'équation différentielle d'ordre $N+1$.

La seconde voie revient à une étude directe de la forme en y_1, y_2, lorsque z décrit les différents contours fermés. Pour cela, M. Fuchs tire parti des coefficients des relations linéaires homogènes qui lient les systèmes fondamentaux d'intégrales appartenant aux différents points singuliers d'une équation différentielle linéaire, relations qu'il a développées dans le tome 75 du *Journal de Borchardt*.

La fin est consacrée au développement de quelques théorèmes spéciaux; en voici un : « Qu'on réduise au plus petit dénominateur les nombres rationnels qui représentent les racines des équations fondamentales appartenant aux points singuliers et à l'hypothèse $z=\infty$ de l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dz^2}=Py$; supposons qu'un quelconque des dénominateurs soit supérieur à dix : cette équation différentielle ne possédera pas d'intégrale algébrique, à moins que la racine d'une fonction rationnelle ne satisfasse à l'équation elle-même ou à l'équation différentielle linéaire en y^2. »

Caspary (F.). — *La surface des centres de courbure dans le paraboloïde elliptique.* (50 p.)

Les surfaces des centres de courbure ont été souvent traitées par les géomètres ; en particulier, Clebsch a publié dans le *Journal de Borchardt* un Mémoire qui contient les résultats détaillés de ses recherches sur les surfaces des centres de courbures des surfaces du second ordre. Cependant l'absence de centre dans une surface du second ordre modifie et simplifie beaucoup les propriétés de ces surfaces, et c'est pourquoi la Faculté de Philosophie de l'Université de Berlin avait posé en 1874 ce problème de concours pour les étudiants :

« Étudier la surface des centres de courbure du paraboloïde elliptique et de sa polaire réciproque, et rechercher exactement les propriétés correspondantes de ces deux surfaces. »

Le prix a été décerné séparément à chacun des deux concurrents, MM. Caspary et Rohovsky. Plus tard, M. Caspary a complété ses études sur cet objet et a présenté ses résultats comme dissertation inaugurale à la même Faculté. Le fruit de ces travaux est le Mémoire publié dans le *Journal de Borchardt*, et qui forme une véritable monographie détaillée des propriétés de la surface des centres

de courbure du paraboloïde elliptique. Le grand nombre des détails ne nous permet pas d'en énumérer quelques-uns; contentons-nous de reproduire les titres des différentes parties du Mémoire.

§ 1. Représentation des coordonnées de la surface par deux paramètres. Relation qui existe entre la surface et le problème des normales.

§ 2. Déduction d'une équation fondamentale pour la recherche et la discussion de la surface des centres.

§ 3. Relations d'invariants. Représentation de la surface des centres sous la forme finale $F(x, y, z) = 27 U^2 - 8 V W^2 = 0$.

§ 4. Recherche des points de la surface d'où l'on peut mener trois normales coïncidantes : plans tangents singuliers et courbes suivant lesquelles ils coupent et touchent.

§ 5. 1° Points de la surface d'où l'on peut tirer des normales formant deux couples de normales coïncidantes; 2° points de la surface d'où l'on peut tirer des normales formant un système de deux et un système de trois normales coïncidantes; 3° points de la surface d'où l'on peut tirer des normales dont quatre coïncident.

§ 6. La courbe double de la surface; ses différentes représentations; ses singularités et nombres caractéristiques.

§ 7. Recherche de la surface polaire réciproque à la surface des centres; ses singularités et l'abaissement de classe qu'elles produisent.

Koenigsberger (L.). — *Sur les relations les plus générales qui existent entre les intégrales hyperelliptiques.* (24 p.)

Le Mémoire résout deux problèmes : 1° réduction du problème de transformation algébrique au problème rationnel; 2° relation la plus générale entre les intégrales hyperelliptiques de même irrationalité.

Les formules qui contiennent les résultats définitifs nous semblent être trop longues et exiger trop d'explications pour pouvoir être communiquées ici.

Faà de Bruno. — *Sur les fonctions génératrices de Borchardt.* (3 p.; fr.)

Hermite (Ch.). — *Extrait d'une lettre à M. L. Kœnigsberger sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable.* (9 p.; fr.)

Il s'agit de l'expression générale, en fonction de l'indice, des po-

lynômes rationnels et entiers par rapport au module, qui se présentent dans les développements des fonctions $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$ suivant les puissances croissantes de la variable. M. Hermite trouve que les développements de ces trois fonctions tendent de plus en plus à se confondre dans leurs derniers termes avec de simples progressions. Deux nouvelles séries de polynômes définies par les coefficients des développements de $\frac{1}{\sin \operatorname{am} x}$ et $\frac{1}{\cos \operatorname{am} x}$ présentent encore beaucoup d'intérêt; c'est à l'égard de ces polynômes que M. Hermite tire de la transformation de nombreuses propriétés qu'il indique succinctement.

Cayley (A.). — *Correction de deux erreurs numériques qui se trouvent dans le travail de Sohncke sur les équations modulaires*, t. XVI. (1 p.)

Lipschitz (R.). — *Contribution à la théorie de la courbure*. (13 p.)

M. Lipschitz se propose de généraliser, pour une variété de n variables, le théorème connu de la théorie de la courbure qui dit que la somme des valeurs réciproques des deux rayons principaux varie quand on effectue une flexion de la surface, mais que le produit des mêmes quantités ou la *mesure de la courbure* de Gauss reste invariable. Pour donner une idée des recherches de M. Lipschitz, il nous faut revenir à l'équation $D(\omega) = 0$ expliquée par l'auteur [1]. Le dernier coefficient D_{n-1} de cette équation, divisé par le premier D_0, forme la généralisation naturelle de la *mesure de la courbure* de Gauss. Les propriétés invariantives des coefficients de cette équation, qui avaient été déjà signalées dans les Mémoires antérieurs, en particulier *Bulletin*, t. IV, p. 304, mènent rapidement au théorème correspondant, dont voici l'énoncé : « La généralisation de la mesure de courbure $\frac{D_{n-1}}{D_0}$ est pour tout n impair un invariant de la forme $g(dy)$ (*Bulletin*, t. IV, p. 307), et, pour tout n pair supérieur à 2, la racine carrée d'un invariant de la forme $g(dy)$.

Hamburger. — *Sur la théorie de l'intégration d'un système de n équations linéaires de premier ordre aux différences partielles contenant deux variables indépendantes et n dépendantes*. (38 p.)

---

[1] Voir *Bulletin*, t. IV, p. 301 (14 et 15).

L'étude des recherches de M. Natani sur les équations différentielles, contenues dans son Livre : *Die höhere Analysis in vier Abhandlungen*, a suggéré à M. Hamburger l'idée de les porter plus loin. Les §§ 1-3 du Mémoire ont pour objet de ramener l'intégration de n équations différentielles linéaires du premier ordre aux différentielles partielles et à n variables dépendantes et deux indépendantes, à l'intégration de plusieurs systèmes incomplets d'équations différentielles ordinaires pour toutes les $n+2$ variables, si cela est possible, c'est-à-dire si les conditions connues d'intégrabilité sont remplies. Il résulte de cette recherche que la classe d'équations linéaires simultanées aux différences partielles intégrée par Jacobi, t. II du *Journal de Crelle*, est la seule qui mène à un seul système de $n+1$ équations différentielles ordinaires pour les $n+2$ variables, ou bien à un système complet. Un complément essentiel des développements de ces trois premiers paragraphes est fourni par les considérations du § 4 sur la forme des équations aux différences partielles qui dérivent d'intégrales générales d'une certaine forme en les différentiant et éliminant les fonctions arbitraires. Cette forme des intégrales est $F = \varphi(f)$, où F et f représentent des fonctions des $n+2$ variables, et φ une fonction arbitraire. Tandis que l'équation aux différentielles partielles dérivée de cette forme d'intégrale est toujours linéaire s'il y a une seule variable dépendante, elle contient en outre, dans le cas de plusieurs variables dépendantes, des termes tels que $q_r p_s - p_r q_s$, où p_i et q_i sont les dérivées des n variables dépendantes prises respectivement par rapport aux deux variables indépendantes. Il existe encore une autre différence entre ces deux cas : c'est qu'il existe, lorsqu'il y a plus d'une variable dépendante, certaines relations entre les coefficients de l'équation dérivée, au nombre de $\frac{1}{2}n(n-1)$. En confirmant ainsi la solution donnée dans les premiers paragraphes, on est conduit en même temps à intégrer ces équations simultanées aux différentielles partielles où entrent les agrégats du second ordre mentionnés ci-dessus, pourvu qu'il existe certaines équations de condition entre leurs coefficients. Enfin l'auteur applique sa méthode à l'intégration d'une équation de $m^{\text{ième}}$ ordre aux différentielles partielles ; M. Natani avait déjà établi la forme de cette équation différentielle, qui est une généralisation de celle d'Ampère, et en même temps il avait indiqué une voie pour l'intégrer.

KOSTKA. — *Sur la détermination des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique par ses coefficients.* (9 p.)

C'est en construisant la *fonction génératrice* que M. Borchardt a montré la source de toutes les méthodes employées pour atteindre le but indiqué par le titre, et M. Mertens a complété cette recherche. Actuellement M. Kostka fait voir que la forme fondamentale, d'où découlent toutes les autres fonctions symétriques, admet une détermination par des considérations simples de permutation et de combinaison.

STERN (M.).—*Sur une propriété des nombres de Bernoulli.* (5 p.) Généralisation d'un théorème de v. Staudt.

LIPSCHITZ (R.). — *Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface.* (7 p.; fr.)

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* de Paris, séances des 10 et 17 janvier 1876. — Comparaison de sa méthode de généralisation avec celle de M. C. Jordan.

SIMON (Max.). — *Multiplication des fonctions elliptiques par des nombres entiers, dans son rapport avec le problème des polygones fermés inscrits aux courbes.* (23 p.)

Le problème de la division du cercle dépend de la multiplication des fonctions cycliques; le problème d'inscrire certains polygones fermés à des courbes, par exemple d'inscrire un polygone fermé à une conique donnée, de sorte que ses côtés touchent une autre conique donnée, et d'autres pour les courbes du troisième et du quatrième degré, se lie à la multiplication des fonctions elliptiques. Le Mémoire de Jacobi, où il a découvert cette relation et résolu le problème pour deux cercles (non concentriques), a donné lieu à une série de travaux scientifiques. M. Simon, élève de M. Weierstrass, traite le problème spécial de deux coniques générales que nous venons de mentionner. Son travail donne des formules très-élégantes, tant pour la multiplication des fonctions elliptiques sous la forme normale de M. Weierstrass que pour la solution du problème spécial, où les seules constantes qu'il fait entrer sont les invariants simultanés des deux coniques.

POCHHAMMER (L.). — *Sur les vitesses de propagation des petites oscillations dans un cylindre circulaire infini et isotrope.* (13 p.)

Les recherches mathématiques de Bernoulli, d'Euler, de Poisson, de Cauchy sur les oscillations de cylindres de longueur finie font abstraction de certaines parties intégrantes du mouvement; d'où il s'ensuit que leurs calculs ne peuvent être regardés comme exacts que pour le cas de cylindres infiniment minces, cas pour lequel M. Kirchhoff a développé la déduction systématique des équations différentielles. Une méthode plus rigoureuse demande qu'on cherche à intégrer les trois équations différentielles de l'élasticité et qu'on prenne en considération les conditions à la surface. C'est ainsi que M. Pochhammer a tâché de procéder pour fixer exactement les vitesses de propagation des oscillations dans un cylindre infini à base circulaire.

Kiepert (L.). — *Sur les surfaces minima.* Ier Mémoire. (12 p.)

Ce Mémoire est désigné par l'auteur comme une étude préparatoire; on y trouve une série de formules destinées à être employées dans les recherches ultérieures.

Bruns. — *Sur un théorème de la théorie du potentiel.* (8 p.)

Cette Note a été occasionnée par le Mémoire de M. Stahl, t. 79 du même *Journal* (1). Nous citerons ici le passage qui donne les conclusions auxquelles M. Bruns est conduit sur la forme de la Terre.

« ... D'après les explications données, on peut dire ceci sur la surface mathématique qui renferme le solide de la Terre : Elle est une surface fermée, continue; la direction de la normale change d'une manière continue; elle est dépourvue d'arêtes, de sommets ou de points singuliers analogues, parce que la gravité possède partout une valeur différente de zéro. D'après ce que nous savons sur la composition de la couche superficielle de la Terre, elle passe par des lieux où la densité varie d'une manière discontinue; donc elle n'est pas formée d'une seule surface analytique, mais elle est soumise à différentes lois de formation sur différents points. La loi de la formation est la même pour tous les points de la surface qui sont compris dans une couche matérielle continue, à l'intérieur de laquelle la densité est constante ou variable d'après une certaine loi analytique. Aux lieux de transition, il y a variation subite de la courbure moyenne, de la mesure de courbure et des azimuts des lignes de courbure.... »

E. L.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. X, p. 183.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

JOHANNIS KEPLERI, ASTRONOMI, OPERA OMNIA, edidit Dr Chr. FRISCH, Stuttgart. — 8 volumes grand in-8° de 6300 pages. Francfort-sur-le-Mein et Erlangen, Heyder et Zimmer, 1858-1871.

Depuis longtemps les nations civilisées ne se sont pas contentées de rendre hommage à la mémoire des savants illustres en leur élevant des statues et des monuments : elles ont tenu aussi à faire revivre leurs écrits, leurs pensées et leurs travaux. C'est ainsi que les Français, les Anglais, les Italiens ont réédité, sous le patronage du gouvernement et des corps savants, les Œuvres de Laplace, de Fresnel, de Lagrange, de Lavoisier, de Newton, de Galilée. Les Allemands les ont suivis dans cette voie lorsqu'ils ont débuté par la publication des Œuvres de Goethe, de Schiller et de Lessing. Ils ont pensé avec raison que l'auteur et le fondateur de l'Astronomie moderne était digne aussi d'un semblable hommage, le célèbre disciple de Mœstlin, Kepler, dont le nom est cher à tous les hommes qui étudient les mouvements célestes, et qui savent à quelles lois ils sont soumis.

Les Œuvres de Kepler se distinguent, en effet, par la science profonde et variée, l'argumentation habile, la pensée ingénieuse, l'expression originale et empreinte de verve poétique, qui témoigne d'un caractère heureux, aimable et bien doué. Ces qualités les rendaient dignes entre toutes de fixer l'attention des hommes qui s'intéressent à la Science comme à la Littérature.

Mais, en dehors des premières éditions préparées par Kepler luimême, il n'existait pas de collection complète de ses Œuvres, et même plusieurs de ses écrits n'avaient pas été publiés; aussi une édition des Œuvres complètes de Kepler vient-elle heureusement combler cette lacune regrettable.

Une publication de ce genre devait exiger plusieurs années de travail : commencée en 1857, elle a été terminée en 1871.

Il est difficile de se figurer quels obstacles aurait eu à surmonter, pour entreprendre cette tâche, un simple particulier privé de ressources et de moyens d'action; mais cet immense labeur a été honoré du patronage et de la libéralité de Maximilien II, roi de Ba-

vière, et de M. Norof, ministre de l'Instruction publique en Russie; de l'approbation des astronomes allemands et des suffrages des Académies de Vienne et de Berlin, et enfin de la souscription de divers savants, de bibliothèques et de Sociétés d'Europe et d'Amérique.

L'éditeur est enfin arrivé au but de ses efforts, grâce à la savante et bienveillante collaboration de M. W. Struve, directeur de l'Observatoire de Poulkova, qui a généreusement communiqué les manuscrits de Kepler, que la bibliothèque de Poulkova conserve à l'égal du trésor le plus précieux; grâce au soin dévoué avec lequel M. Otto Struve fils a coordonné et discuté ce que ces manuscrits renfermaient de plus difficile; grâce aussi au zèle éclairé de MM. C. Schaaf, professeur au gymnase de Tubingue, et H. Kratz, professeur au gymnase de Stuttgart.

Possédant à fond la langue latine, M. Schaaf a réussi à traduire les passages embarrassants que leur style un peu archaïque avait rendus obscurs, et M. Kratz a bien voulu se charger du travail pénible de la composition typographique et de la correction de l'Ouvrage.

Telles sont, ainsi que l'explique M. le Dr Chr. Frisch, les bases d'après lesquelles a pu être menée à bonne fin la publication des OEuvres complètes de Kepler.

L'analyse que nous désirons exposer servira d'énumération des sujets d'études de l'illustre précurseur de Newton. L'examen détaillé des écrits de Kepler a été fait depuis longtemps, et à diverses reprises; il n'est donc pas utile de le reproduire ici. Il en est de même de la biographie de Kepler; nous renverrons donc, comme pour la critique de ses Ouvrages, aux nombreux écrivains qui en ont fait une étude spéciale, et parmi lesquels nous mentionnerons Arago, Bailly, Delambre, Saverien, Trouessart, Montucla, Hoefer, Michaud, Joecher, Niceron, J. Bertrand, etc., etc.

Mais, si la biographie de Kepler est connue dans tous ses détails, il n'est pas sans intérêt de revenir sur un des caractères spéciaux du génie de ce grand homme. Doué d'une imagination ardente, Kepler envisageait la recherche des lois du mouvement des corps célestes, et de la planète Mars en particulier, comme la poursuite d'un ennemi entreprenant, et prêt à déjouer toutes les combinaisons. Le tableau des phases de la lutte

essais infructueux, des moments de défaillance, tout cela est fidèlement retracé dans les écrits de Kepler. Nous en reproduirons deux passages, nous bornant à ce court extrait, parce qu'ils nous ont paru, entre tous, plus particulièrement conçus dans cet esprit poétique qui témoigne de la profondeur de vues de Kepler, et de l'enthousiasme que lui firent éprouver le spectacle de son œuvre et le succès de ses efforts, exemple admirable et bien digne de l'hommage éclatant que lui a décerné la postérité.

Nous signalerons en premier lieu un passage du *Commentaire des mouvements de Mars,* Ouvrage entièrement inspiré par une pensée unique, et auquel le style imagé qui le distingue donne un cachet de remarquable vivacité. Kepler n'a pas eu seulement le génie brillant des grands inventeurs : il a eu encore le génie poétique des grands écrivains.

Voici comment il s'exprime au début du Chapitre LI (IVe Partie) :

« Mais tandis que, par ce moyen, je triomphe des mouvements de Mars et que, le croyant subjugué, je lui prépare des Tables et des équations pour l'entraver et l'emprisonner, on me l'annonce partout ailleurs ! Vain succès ! Il me faut recommencer la lutte gigantesque ; car l'ennemi, retenu prisonnier chez moi, enchaîné comme un captif que l'on dédaigne, a brisé toutes les entraves des équations, et s'est échappé des prisons de mes Tables. Et cependant, si l'on se reporte à ce que j'ai dit au Chapitre XLV (à savoir, que l'orbite est de forme ovale), aucune méthode, interprétée par la Géométrie, n'a pu lutter d'approximation numérique avec l'hypothèse auxiliaire du Chapitre XVI qui, bien qu'elle soit erronée, conduit néanmoins à des équations exactes. Mais les vedettes du dehors, réparties sur le pourtour de l'orbite, c'est-à-dire dans un ordre parfaitement naturel, ont taillé en pièces les légions d'hypothèses physiques du Chapitre XLV, que j'avais mandées en toute hâte ; elles ont secoué leur joug et recouvré leur liberté. Et peu s'en est fallu que l'ennemi en fuite ne courût rejoindre ses rebelles partisans, et ne me réduisit au désespoir, si je n'avais eu soudain l'idée d'appeler à mon aide de nouvelles hypothèses physiques, les anciennes ayant été détruites et dispersées, et si je n'avais fait toute diligence pour être exactement renseigné et savoir par où mon prisonnier s'était échappé, le poursuivre sans repos ni trêve et arriver enfin à m'attacher à ses traces. Dans les quelques Chapitres qui vont suivre,

je raconterai avec ordre chacun de ces événements et comment ils se sont accomplis. »

Bien qu'elle soit exprimée avec beaucoup moins de coloris et de vivacité, la manière dont Kepler raconte la découverte de la *troisième loi* mérite également d'être rapportée :

« Jusqu'à présent », dit Kepler, « il s'est agi des divers éléments de l'orbite d'une seule et même planète. Je veux, maintenant, m'occuper de la relation qui existe entre les mouvements de deux planètes.

» Le moment me paraît venu de reproduire et de terminer ici un certain passage de mon *Mystère cosmographique,* perdu de vue pendant vingt-deux ans, parce qu'il ne me semblait pas encore assez clair. Ayant donc réussi, au prix d'un travail opiniâtre, à déduire des observations de Tycho Brahe les véritables durées des mouvements, enfin, enfin, j'ai eu le bonheur de trouver la proportion réciproque qui unit les temps à la grandeur des orbites.

.... Sera quidem respexit inertem,
Respexit tamen, et longo post tempore venit.

» Lente à se présenter à mon esprit impuissant à la saisir, elle lui est enfin apparue, après un laps de temps bien long.

» Et, si vous en demandez la date certaine, c'est le 8 mars de cette année 1618 que, conçue d'abord dans mon esprit, mais soumise sans succès au calcul, et rejetée alors comme inexacte, enfin reprise le 15 mai par un nouvel effort, elle a déchiré le voile de ténèbres de mon intelligence et mis fin à une si longue épreuve, à dix-sept ans de laborieuse étude des observations de Tycho, et à une méditation constante, au point que je croyais rêver et faire quelque pétition de principe. Mais c'est une chose très-exacte et très-certaine que la relation entre les durées des révolutions de deux planètes est précisément exprimée par la proportion semi-cubique des distances moyennes, c'est-à-dire des rayons moyens de leurs orbites, en se rappelant, toutefois, que la moyenne arithmétique entre les deux axes d'une ellipse est un peu moindre que le plus grand diamètre. » (*Harmonices mundi,* Lib. V, Cap. III).

Ces quelques extraits suffiront sans doute pour donner l'idée d'entreprendre l'étude intéressante de Kepler comme astronome, mathématicien, poëte, physicien, etc.; mais ces côtés trop spéciaux

du génie de Kepler ne peuvent être examinés ici, quant à présent, et notre intention est simplement de donner une analyse rapide de la dernière édition des Œuvres complètes.

Tome I. 1858.

Le premier Volume (1858) des Œuvres complètes de Kepler a été consacré aux vingt-trois Chapitres du *Mysterium cosmographicum*, à la Correspondance de Kepler relative aux théories astrologiques, et enfin aux écrits de Kepler plus spéciaux à cet objet (prophéties et calendriers pour les années 1598, 1599, 1605, 1618 et 1619).

Les efforts que l'esprit humain eut à faire pour briser les liens qui arrêtaient son élan, ou pour donner libre carrière aux nouvelles idées, et construire l'édifice de la Science sur de nouvelles bases, les difficultés de toute nature avec lesquelles il allait lutter, tout cela se trouve décrit à chaque page de ce livre. Cet Ouvrage donne ainsi une idée nette de l'état des esprits au XVIe siècle, et de la tâche ingrate et laborieuse que, seul, un homme de génie allait entreprendre et couronner par une découverte aussi brillante. La philosophie d'Aristote régnait dans la majorité des écoles, ne laissant aux novateurs qu'un champ restreint; à part quelques esprits, tous les autres étaient tenus sous sa dépendance. Dans les Mathématiques, on ne connaissait qu'Euclide et Archimède; l'Algèbre, encore peu connue, n'était que bien rarement associée à la Géométrie; les logarithmes, d'un si grand secours dans les opérations numériques, n'étaient pas en usage courant. En Géométrie, on n'avait encore que des méthodes de raisonnement d'un emploi difficile, et qui allaient attendre une vingtaine d'années pour s'enrichir d'un précieux auxiliaire et revêtir une forme plus tangible. En Astronomie, on ne connaissait que Ptolémée; peu d'esprits, en effet, osaient suivre les idées de Copernic; l'Astronomie était, d'ailleurs, confondue avec l'Astrologie et sous son entière dépendance. Pour enseigner l'Astronomie, il eût même été dangereux de se mettre en opposition avec ces idées, alors en grande faveur. Ces réflexions servirent de ligne de conduite à Kepler, lorsque ce géomètre, à peine encore âgé de vingt-cinq ans, entreprit la publication de cet Ouvrage, fruit des premières réflexions de sa jeunesse.

L'harmonie de l'univers avait de bonne heure attiré l'attention de Kepler. La lecture des écrits de l'astrologue Scaliger avait puissamment contribué à éveiller sa curiosité. Il pensa, avec raison, que la clef de l'harmonie céleste lui serait donnée par une étude préalable et approfondie de la nature. Ces méditations constantes, jointes à une force de pénétration étonnante et à une fécondité d'imagination qui lui permettait de concevoir et d'inventer les théories les plus dissemblables, amenèrent ce vaste esprit à renverser le vieil édifice consacré par tant de siècles, et à jeter les bases de la construction inébranlable qui lui a fait place pour toujours.

Le *Mysterium cosmographicum*, édité en 1596, est divisé en vingt-trois Chapitres, suivis, chacun, de notes de l'auteur. Il renferme l'exposé des idées de Kepler sur la filiation des cinq polyèdres réguliers, et la relation de ces corps avec les sept planètes, les signes du zodiaque, les notes de la gamme, etc. Le Chapitre XX contient l'énoncé, très-explicite, de la loi des révolutions, et sa vérification numérique au moyen des logarithmes. Cependant, à l'époque de la publication de ce livre, Kepler doutait encore de l'exactitude de cette loi.

La préface de l'Ouvrage renferme la correspondance échangée à ce sujet entre Kepler et divers astronomes, Mœstlin, Herwart, etc.

Elle est suivie de la correspondance relative aux théories astrologiques. On y trouve les idées les plus originales sur les sciences physiques et astronomiques; car il faut dire que Kepler était pris pour arbitre sur une foule de questions par tous les savants. Fabricius, entre autres, eut avec lui un échange de lettres des plus actifs, de 1601 à 1608.

Les autres Mémoires, moins importants, que renferme le même volume sont désignés dans ce qui suit :

Calendarium in annos. 1598 *et* 1599 (all.).

De Fundamentis Astrologiæ certioribus, 1602 (lat.).

Judicium de trigono igneo, 1603 (all.).

Prognosticum in annum 1605 (all.).

Description de l'étoile nouvelle apparue en 1604 (all.).

Prognosticum in annos 1618 *et* 1619 (all.).

Réponse à Röslin, 1609 (all.).

Tertius interveniens, 1610 (all.), exposé de 140 propositions relatives à l'Astronomie, à l'Astrologie, à la Physique, etc., etc.

La presque totalité des Mémoires de Kepler écrits en allemand figure dans ce volume; au reste, ces Mémoires sont très-peu nombreux. La correspondance et les OEuvres de Kepler ont été écrites en latin; il n'a employé l'allemand que par exception.

Tome II. 1859.

Le Tome II (1859) renferme l'*Astronomie optique,* en onze Chapitres, avec les notes de l'éditeur.

Cet Ouvrage est précédé de la *Correspondance de Kepler* à ce sujet (1604). Celle-ci contient des considérations très-judicieuses sur la nature et les lois des phénomènes optiques, la direction de la lumière, la réflexion, la chambre noire, la réfraction ordinaire, les réfractions astronomiques, la hauteur de l'atmosphère, les opinions des anciens sur la réfraction; l'anatomie et les fonctions de l'œil; la réfraction dans une masse d'eau de forme sphérique; l'étude des vues presbytes et myopes, etc.; l'emploi des lentilles.

On y trouve aussi les Chapitres suivants :

De la nature diverse des rayons lumineux du Soleil et de la Lune; phases de la Lune; taches de la Lune; radiation des autres astres, planètes et comètes.

Ombre et pénombre de la Terre. Coloration rouge de la Lune au moment des éclipses. Éclipses de Soleil les plus remarquables. Occultations.

Définition des parallaxes.

Étude optique des mouvements des planètes, etc., etc.

Au même Volume ont été ajoutées les Lettres de Kepler *Sur l'invention de la lunette de Galilée* et les découvertes de cet astronome (satellites de Jupiter, phases de Vénus, aspects de Saturne, taches du Soleil, montagnes de la Lune, etc.).

Kepler publia, en 1610, sa *Conversation avec l'Envoyé céleste de Galilée.* Cet écrit est le résumé des lettres qui précèdent.

En 1611, parut la *Description des satellites de Jupiter,* puis le grand *Traité de Dioptrique,* renfermant 141 propositions ou problèmes sur la réfraction, la marche des rayons lumineux dans une sphère, dans un prisme, dans une lentille convexe ou concave; sur l'effet de ces verres placés devant un œil presbyte ou myope. Combinaison de lentilles, marche des rayons dans la lunette astronomique et la lunette de Galilée.

Les physiciens modernes n'ont presque rien changé à cet ensemble.

En 1606, Kepler publia sa *Description de l'Étoile nouvelle* qui apparut en 1604 au pied du *Serpentaire* (trente Chapitres). Cet Ouvrage, comme le dit l'auteur, abonde en dissertations sur l'Astronomie, la Physique, la Métaphysique, la Météorologie et l'Astrologie, et il est suivi de la description de l'étoile variable du Cygne, observée en 1600, de la détermination de la Nativité du Christ, et d'une prétendue observation d'un passage de Mercure sur le Soleil (1607).

Tome III. 1860.

Le Tome III renferme l'œuvre capitale de Kepler : la discussion et l'étude des mouvements de Mars, fondées sur dix observations de cette planète par Tycho Brahe. Soixante-dix Chapitres, procédant les uns des autres par voie de dédoublement logique, constituent le fond de ce magnifique Ouvrage, dont l'analyse ne saurait être détaillée ici, et devra être réduite à quelques indications sur l'enchaînement des diverses propositions.

Première Partie. — *De la comparaison des hypothèses.*

Distinction entre la première inégalité (mouvement diurne, commun à tous les astres), et la seconde (mouvement propre des planètes d'occident vers l'orient). — Figuré des positions de Mars depuis le commencement de 1580 jusqu'à la fin de 1596. — Explication de ces mouvements dans l'hypothèse de l'excentrique et des contrépicycles de Ptolémée. Hypothèse des cieux solides d'Aristote, détruite par Tycho Brahe. Accord des apparences et des hypothèses concourant à produire une seule et même orbite. — Transformation que Copernic a fait subir à l'hypothèse de Ptolémée. — Comparaison des trois hypothèses de Ptolémée, de Copernic et de Tycho; leurs caractères distinctifs. — Théorie du mouvement propre des planètes.

Deuxième Partie. — *De la première inégalité de Mars, selon la théorie des anciens.*

A quelle occasion je fus conduit à m'occuper de la théorie de Mars. (Kepler raconte comment se développa en lui la passion des études astronomiques, qui le détermina à écrire le *Mysterium cosmographicum*. L'accueil que Tycho Brahe avait fait, en 1597, à son

Ouvrage, l'enflamma du plus vif désir d'avoir communication de ses observations. Un hasard providentiel prépara le rapprochement des deux astronomes : Tycho Brahe fit le voyage de Prague, où Kepler vint bientôt le rejoindre.)

Table de dix observations de Mars, faites par Tycho, de 1580 à 1600. — Réduction du lieu de l'écliptique à l'orbite de Mars. — Discussion des observations qui permirent à Tycho Brahe de déterminer l'époque des oppositions. — De la parallaxe diurne de Mars. Série des observations de Kepler. — Détermination des nœuds et de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique. — Nature de l'orbite des planètes. — Réduction des dix positions de Mars et de deux autres nouvelles à la ligne du mouvement apparent du Soleil. — Méthode de recherche de l'hypothèse qui doit servir à déterminer la première inégalité. — Détermination sommaire de l'apogée et du mouvement des nœuds. — Discussion de douze positions du soir au moyen de l'hypothèse trouvée. — Désaccord, par les latitudes du soir, de cette hypothèse basée sur l'avis des auteurs et confirmée par toutes les positions du soir. — Réfutation de la même hypothèse par la discussion des observations faites en dehors des positions du soir. — Raison pour laquelle une hypothèse erronée a cependant conduit à un résultat exact.

Troisième Partie. — *Recherche de la seconde inégalité de Mars, c'est-à-dire du mouvement du Soleil ou de la Terre.*

L'épicycle ou orbite annuelle n'est pas concentrique au point d'égalité du mouvement. — Recherche de l'excentricité de l'orbite. — Confirmation et preuve plus directe de l'excentricité. — Étant données trois distances du Soleil au centre du monde, et leurs points correspondants sur le zodiaque, trouver l'apogée et l'excentricité de l'orbite du Soleil ou de la Terre. — Déduire, des mêmes observations, que l'orbite est excentrique au Soleil ou à la Terre. — De quatre observations de Mars en dehors de la position du soir, mais dans la même région, déduire l'excentricité de l'orbite terrestre, son aphélie et la proportion des orbites. — Preuve de l'égalité de l'excentricité du Soleil à 1800. — Construire la distance du Soleil et de la Terre d'après la connaissance de l'excentricité. — Construction et usage d'une Table de la distance du Soleil à la Terre. — La bissection de l'excentricité du Soleil ne modifie pas sensiblement les équations du Soleil données par Tycho. — Des quatre

méthodes pour la calculer. — La force qui fait mouvoir les planètes sur une courbe s'affaiblit à mesure que la distance augmente. — Elle réside dans la masse du Soleil, qui est doué d'une force magnétique, et qui se meut sur lui-même. — La force, à l'inverse de la lumière, n'est pas arrêtée par l'interposition d'autres corps. — Loi de son affaiblissement lorsque la distance augmente. — Comparaison de la force motrice de la Lune. — Outre la force motrice émanée du Soleil, les planètes sont douées d'une force particulière; le mouvement de chacune d'elles résulte de deux causes. — Du rôle et du mode d'action de la force qui anime les planètes, de manière que ces corps décrivent des lignes courbes. — Méthode approximative et suffisante pour la théorie du Soleil, pour déduire les hypothèses d'une cause physique.

Quatrième Partie. — *Détermination de la véritable mesure de la première inégalité.*

« Ce que j'ai exposé », dit Kepler, « dans la troisième Partie, s'applique à toutes les planètes; c'est pourquoi je suis en droit de l'appeler la *clef de l'Astronomie future;* et nous devons d'autant plus nous réjouir de l'avoir découverte, qu'il est certain qu'on n'aurait pu y parvenir autrement que par les observations de Mars; car, bien que Ptolémée ait remarqué cette bissection de l'excentricité du Soleil dans Vénus, ainsi que dans Mercure, et que, pour l'expliquer, il ait imaginé les centres des excentriques, ou, ce qui revient au même, les mouvements du centre de l'épicycle, toutes choses dont l'exposition est réservée pour une description spéciale de ces planètes, la condition des observations mêmes, et les courtes digressions de Vénus, qui ne se laisse observer que pendant quelques nuits, auraient créé un grand obstacle à la recherche méthodique, et un plus grand encore, si la planète se fût trouvée en dehors de Mars. Cette tentative eût été plus inadmissible dans le cas de Mercure; cette planète sort, en effet, très-rarement des rayons du Soleil, et elle est plus éloignée de la Terre que Vénus et Mars, qui sont le plus rapprochées de nous. Il nous aurait fallu, comme Ptolémée, chercher la vérité sur un champ indéfini, et la saisir au milieu d'épaisses ténèbres. »

Essai d'une détermination des apsides, de l'excentricité et du rapport des orbites. — Même recherche, plus attentive et plus exacte. — Du défaut des équations déduites de la bissection de

l'excentricité et de l'aire des triangles en admettant une orbite parfaitement circulaire. — Preuve que l'orbite n'est pas un cercle. — Des causes naturelles de l'aplatissement de l'orbite. — De la nature de l'orbite. — Méthode de quadrature de l'orbite par l'emploi de la *conchoïde* (Kepler désigne ainsi une courbe, dont l'abscisse est l'arc d'une circonférence, et l'ordonnée un rayon vecteur de cette circonférence, rapportée à un point intérieur, pris pour pôle). — Méthode de calcul des retards de la planète. — Méthode plus approchée. — De six autres méthodes pour arriver au même but. — Degré de confiance qu'il faut accorder à l'hypothèse faite sur la nature de l'orbite. — Emploi d'autres méthodes pour déterminer la distance de Mars au Soleil. — Examen plus approfondi de la proportion des orbites. — Explication du mouvement par l'action magnétique attractive exercée par le Soleil. — Énoncé de la *loi des aires*. — Énoncé du *problème de Kepler :*

« Il me suffit de croire », ajoute l'auteur, « qu'il ne peut, *a priori*, être résolu, à cause de l'hétérogénéité de l'arc et du sinus ; mais celui qui me montrera la route à suivre, à moi qui cherche avec peine, celui-là sera un nouvel Apollonius. »

Cinquième Partie. — *De la latitude.*

Discussion de la position des nœuds et de l'inclinaison des orbites. — Hypothèse physique de la latitude. — Discussion des parallaxes de Mars. — Recherche de la plus grande latitude, tant au moment de la conjonction qu'à celui de l'opposition. — Les plus grandes digressions n'ont pas toujours lieu à l'opposite du Soleil. — De la position des nœuds et de l'inclinaison de l'orbite de Mars sur l'écliptique, on conclut que cette orbite a bien le Soleil pour foyer. — L'inclinaison de l'orbite de Mars est-elle la même, de nos jours, que du temps de Ptolémée ? — Sur les latitudes de l'écliptique et la révolution inégale des nœuds. — Discussion de trois observations de Ptolémée ; correction du moyen mouvement et du mouvement de l'aphélie et des nœuds. — Discussion de deux dernières observations de Ptolémée, dans le but de déterminer la latitude et la proportion des orbites du temps de Ptolémée.

Cent neuf Notes de l'éditeur, comprenant 66 pages, éclaircissent et complètent divers Chapitres de l'Ouvrage.

Le troisième volume que nous analysons ici se termine par les

fragments des manuscrits de Kepler relatifs à l'Astronomie, conservés d'abord à Saint-Pétersbourg, et enfin à Poulkova.

Le plus intéressant porte pour titre : *Hipparque ou Traité des grandeurs et distances relatives des trois corps ;* composé à Prague depuis plusieurs années, et complété à diverses reprises, surtout en 1616, comprenant dix-neuf théorèmes et dix-huit problèmes, suivis de trois Chapitres imparfaitement coordonnés.

Catalogue d'éphémérides de quarante-six éclipses de Lune, observées de 1572 *à* 1625.

Traité du mouvement de la Lune (1601) ; réflexions sur la théorie de la Lune, sur la *variation* découverte par Tycho Brahe, sur l'*équation annuelle,* due à Kepler ; notes sur la détermination des phases des éclipses.

Notes de Kepler sur diverses observations de la Lune faites par Tycho.

Notes de l'éditeur.

Lettre de Kepler sur l'éclipse de Soleil du 12 *octobre* 1605.

Tome IV. 1863.

Le quatrième Volume (1863) des OEuvres complètes de Kepler renferme tous les écrits de ce grand homme sur la chronologie et l'art de vérifier les dates. Un génie aussi vaste que le sien devait aborder les sujets les plus variés, et, entre autres vues originales et fécondes, Kepler avait parfaitement compris le service que l'on était en droit d'attendre de l'Astronomie pour fixer avec certitude quelques points de repère à travers les événements historiques. Il revint avec prédilection à des études qu'il avait commencées à Tubingue, de 1589 à 1593. De nombreuses lettres échangées avec Brengger, Calvisius, Crüger, Herwart, Mœstlin, Scaliger, etc. (1597-1616), témoignent suffisamment de l'intérêt que Kepler attacha à ces questions. Elles sont le résumé des théories et aperçus développés dans les Ouvrages suivants, les plus importants du volume dont il s'agit pour le moment :

Livre de J. Kepler sur le *Calendrier Grégorien,* autrement dit, sur la *nécessité de la réforme du Calendrier Julien,* et sur les *principes et les motifs de la correction Grégorienne.*

Dans ce Livre, écrit en allemand, et annoté en latin par Han-

schius, l'auteur mathématicien entre en discussion avec quatre personnages auxquels il expose en détail la question du Calendrier, et la détermination des dates des fêtes religieuses, etc.

Kepler est sans doute le premier astronome qui ait cherché à reproduire les éphémérides des éclipses de Soleil et de Lune, anciennement observées. Cette question forme, de nos jours encore, le sujet des grands prix proposés par l'Institut; il n'en a pas été donné, jusqu'à présent, de solution complète.

Quoi qu'il en soit, Kepler a basé sur un travail de ce genre la vérification des dates de la chronologie des Juifs, des Grecs et des Romains.

Il a aussi discuté et commenté divers passages de la Science des Temps : « *De Doctrina temporum* », du P. Pétau, et de la *Chronologie* de Scaliger.

Il édita en 1606, à Francfort, sa discussion *Sur la date véritable de la Nativité du Christ*. Cet Opuscule, écrit en latin, fut suivi de la publication, en 1613, à Strasbourg, d'une réponse à des remarques de Röslin, et d'un autre Mémoire sur la Nativité, divisé en quinze Chapitres. Ce nouvel Ouvrage est écrit en allemand. C'est un commentaire détaillé du précédent.

Nous ne ferons qu'indiquer les titres des Mémoires que nous rencontrons ensuite :

Responsio ad Sethum Calvisium (même sujet). Francfort, 1614.

De anno natali Christi. Francfort, 1614; traduction presque littérale, en langue latine, du Mémoire de 1613, publié en allemand et divisé, comme lui, en quinze Chapitres.

Eclogæ chronicæ. Francfort, 1615; correspondance relative à la chronologie et à quelques dates de la vie du Christ.

Canones pueriles. Ulm, 1620; chronologie depuis Adam jusqu'à l'an du Christ 1620.

Notes de l'éditeur sur les Ouvrages de Chronologie.

Le quatrième Volume est terminé par les écrits de Kepler, en latin, sur la *Stéréométrie des tonneaux, supplément à la Stéréométrie d'Archimède; emploi de la jauge graduée*.

On sait qu'il faut attribuer à Kepler l'honneur d'avoir remarqué le premier qu'une fonction continue varie par degrés insensibles dans le voisinage de ses maxima et de ses minima. Kepler fit, d'ail-

leurs, usage de la méthode infinitésimale pour établir l'expression des volumes et des surfaces.

Tome V. 1864.

Le cinquième Volume des OEuvres de Kepler renferme divers Ouvrages sur l'*Harmonie de l'Univers* (*Harmonices mundi*, Libri V). Le premier est divisé en cinq Livres où sont développés les aperçus relatifs à la Géométrie, à l'Architecture, à la Musique, à la Physique, à la Psychologie et à l'Astrologie, à l'Astronomie et à la Métaphysique (1619), suivi de la traduction du Livre III des *Harmonies de Ptolémée* (moins les deux premiers Chapitres).

Cet Ouvrage excita de vives discussions auxquelles Kepler dut répondre, en 1622, par l'apologie et la défense de sa théorie.

Le Volume se termine, comme le précédent, par un écrit de Kepler sur la Stéréométrie, commentaire et traduction, en allemand, de la méthode de mesures d'Archimède, appliquée au jaugeage des tonneaux, divisé en cent paragraphes.

Mentionnons aussi les mesures de la cité d'Ulm, et enfin la description d'une machine hydraulique.

Tome VI. 1866.

Les études astronomiques de Kepler, commencées par une correspondance avec les astronomes d'Allemagne, furent poursuivies sans interruption pendant vingt-deux ans à dater de l'année 1596.

Dans son *Mysterium cosmographicum*, Kepler avait cherché à formuler des règles et des principes géométriques sur le mouvement et les distances des planètes, espérant jeter ainsi les bases d'une Astronomie nouvelle. Cette recherche fut le but des efforts de sa vie entière, et il y mit la dernière main lorsqu'il publia l'*Harmonie du monde*, en 1619. Ces études lui avaient fait remarquer l'utilité de recherches sur les principes mêmes de l'Astronomie, les éclipses de Lune et de Soleil, la théorie des instruments d'optique, la théorie des réfractions, les anomalies et inégalités du mouvement de la Lune et des planètes, etc. Il se trouva naturellement amené à composer un Ouvrage didactique et une série de Traités dans lesquels ces diverses questions étaient exposées avec plus ou moins de détails.

Au nombre des plus importants que renferme le Tome VI des Œuvres complètes de Kepler, nous trouvons l'*Epitome Astronomiæ Copernicanæ*, exposé raisonné, par demandes et par réponses, de la nouvelle théorie astronomique fondée par l'illustre Copernic. L'Ouvrage, édité à Linz en 1618 et à Francfort en 1621, se compose de sept Livres ou Chapitres : les trois premiers, relatifs à la doctrine sphérique, le quatrième à la Physique céleste, et les trois derniers à la doctrine théorique.

La correspondance de Kepler au sujet de cet Ouvrage se trouve réunie à ce Volume.

Nous avons dit précédemment que toute l'autorité d'un génie, tel que celui de Kepler, devait suffire à peine pour faire admettre les idées nouvelles de Copernic. Tycho Brahe avait dû leur donner une forme un peu indécise, constituant pour elles une sorte de correctif. Il avait admis, en principe, la théorie de Copernic, et, pour lui, toutes les planètes tournaient autour du Soleil, mais ce vaste ensemble se mouvait lui-même autour de la Terre. Les systèmes de Ptolémée et de Copernic se trouvaient ainsi conciliés.

L'importance d'un Ouvrage de ce genre, l'influence qu'il exerça à l'époque de sa publication et sa haute valeur scientifique, qui lui donnerait, de nos jours encore, un rang très-élevé, motiveraient suffisamment une analyse approfondie. Mais, pour ne pas sortir du cadre même de ce *Bulletin,* nous croyons devoir nous borner à un exposé plus sommaire et à une simple et rapide indication du sujet des Chapitres.

Livre I. — *Des principes de l'Astronomie en général, et de la doctrine sphérique en particulier.*

Au début du premier Livre, Kepler démontre que la Terre est de forme sphérique, et décrit les méthodes pour en évaluer la grandeur.

Chapitre II : Réflexions sur la forme, le nombre, les dimensions et l'éloignement des étoiles. Nature matérielle des planètes et du Soleil.

Chapitre III : Nature et hauteur de l'atmosphère. Réfraction astronomique, etc.

Chapitre IV : De la place de la Terre dans l'univers. Explication du mouvement diurne. Exposé des raisons qui militent en faveur

de la théorie de Copernic. Les principaux arguments invoqués par Kepler sont au nombre de sept, empruntés à la Métaphysique, à la Physique, à la Mécanique, etc. L'origine du mouvement le conduit à formuler une théorie des fibres magnétiques qui, de nos jours, a servi à la conception des *lignes de force*. Kepler fait également allusion à l'*âme de la Terre,* qu'il définit et défend par les mêmes considérations qu'on retrouve à chaque instant dans ses écrits.

Livre II. — *De la sphère et de ses cercles.*

Tout ce Livre est consacré à des définitions. En premier lieu, Kepler donne l'énumération complète des cercles de la sphère; puis il indique les différents caractères de ces cercles, la division géométrique de la circonférence, la division astronomique du zodiaque, sa division astrologique en triangles ou trigones, etc. Un paragraphe est réservé à la désignation des rhumbs de vent. Le Livre se termine par la définition des petits cercles et d'autres lignes.

Livre III. — *De la doctrine sphérique du premier mouvement (mouvement diurne).*

Après une courte introduction, et un précis de la division du Livre, le premier Chapitre est consacré à la description du lever et du coucher des astres. La constance de la hauteur du pôle est clairement affirmée, contrairement à l'opinion qui régnait alors à ce sujet.

Chapitre II : Détermination des coordonnées des divers points de l'écliptique. Tables numériques.

Chapitre III : Définitions et qualifications de l'année et du jour. De l'équation du temps.

Chapitre IV : Saisons et zones.

Chapitre V : Du lever et du coucher des astres à certaines époques de l'année : De l'année caniculaire des Égyptiens. Du lever héliaque. Des apparences dues à la sphéricité de la Terre. Antipodes.

Livre IV. — Premier de la doctrine théorique, et intitulé : *Du système du monde.*

Chapitre I : Éléments du système planétaire. Raisons pour lesquelles le Soleil en occupe le centre. Estimation de la distance de la Terre au Soleil. Kepler trouve 229 rayons solaires pour la distance, et le rapport de 69380 à l'unité pour les volumes.

Recherches sur la densité des planètes. Les nombres donnés par Kepler sont un peu supérieurs aux évaluations de l'Astronomie moderne.

Enfin, selon Kepler, l'éloignement des étoiles est de 4 millions de rayons solaires.

On voit, par ces évaluations, que l'illustre fondateur de l'Astronomie n'hésitait pas à donner à l'univers les dimensions grandioses que les perfectionnements apportés aux moyens d'observation allaient bientôt encore obliger à élargir.

Chapitre II : Du mouvement des corps célestes. Le Chapitre débute par l'énoncé très-explicite de la relation connue aujourd'hui sous le nom de troisième loi de Kepler : « La proportion des temps des planètes », dit-il, « n'est pas égale, mais supérieure à celle des orbites; elle est très-exactement marquée, pour les planètes supérieures, par la *proportion sesquialtère*. En d'autres termes, si des nombres 30 et 12, années de Saturne et de Jupiter, vous prenez les racines cubiques et les élevez au carré, vous retrouvez la proportion des orbites de ces planètes. Même relation pour deux planètes non consécutives. Par exemple, l'année de Saturne est 30, celle de la Terre étant 1; $\sqrt[3]{30} = 3,11$; $\sqrt[3]{1} = 1$; leurs carrés ont pour valeurs 9,672 et 1. La distance de Saturne est donc à celle de la Terre :: 9672 : 1000, et l'approximation est d'autant plus grande, que vous avez pris une durée plus exacte. »

Une autre proposition, aussi importante et non moins clairement exprimée, est le principe de l'inertie formulé plus loin par Kepler, qui se trouve amené à étudier l'action attractive et directrice du Soleil, qu'il compare à la force magnétique. Il ajoute même que cette force conserve son unité, mais qu'elle varie, comme la lumière, en raison inverse du carré de la distance, et qu'elle se propage à travers les corps, semblable en cela au magnétisme; qu'elle émane de toutes les planètes, et que c'est elle, par exemple, qui, nous arrivant de notre satellite, produit l'intumescence de l'Océan.

Kepler revient ensuite à l'énoncé et à la preuve de la *proportion sesquialtère;* puis il s'efforce de trouver des relations harmoniques dans le mouvement annuel de notre planète. Du mouvement diurne il conclut à une rotation de toutes les autres planètes, analogie confirmée par les découvertes ultérieures. La Terre, livrée à elle-

même, accomplirait un nombre de révolutions exprimé par 360, nombre essentiellement harmonique; le complément de 5,25 doit être attribué à une action spéciale du Soleil, et vraisemblablement à la lumière qu'il répand sur la Terre. Le mouvement des planètes secondaires (satellites) est dû à des causes semblables à celles qui produisent le mouvement des planètes primaires (planètes). La preuve en est donnée par la *variation* de la Lune, découverte par Aboul Wefà et reconnue par Tycho Brahée, à laquelle Kepler ajoute la mesure d'une inégalité spéciale du mouvement lunaire, connue depuis cette époque sous le nom d'*équation annuelle*. Tandis que la *variation*, dont la période est d'un mois synodique, et dont l'argument est la différence des longitudes du Soleil et de la Lune, reconnaît pour cause la différence des attractions exercées par le Soleil sur la Terre et sur la Lune, l'*équation annuelle* a pour période l'année, et pour argument l'anomalie moyenne du Soleil. Elle dépend de l'excentricité de l'orbite terrestre. Cette inégalité se trouve déjà décrite par Kepler dans le Tome III (Chapitre *De Luna*, anno 1616).

Chapitre III : Du mouvement réel des planètes, de leur véritable inégalité et de sa cause.

L'inégalité du mouvement des planètes est, en partie, réelle et, en partie, produite par les illusions de la vue. Explications données par les anciens, auxquelles Kepler ajoute son opinion. Dans sa *Philosophie magnétique*, W. Gilbert avait attribué à la Terre une nature magnétique. Kepler adopte cette base et explique le mouvement des planètes par le jeu de *fibres* ou *lignes de force* magnétiques. Celles des planètes restent toujours parallèles à elles mêmes, de sorte que le Soleil les attire et les repousse alternativement. Les conclusions de cette théorie s'appliquent au mouvement de la Lune. Bien que cet astre tourne toujours la même face vers la Terre, il peut être doué de quelque nutation qui échappe à la faiblesse de notre vue; de plus, il n'est pas inadmissible qu'un globe intérieur à celui de la Lune vienne jouer le rôle du corps magnétique dont il a été question.

LIVRE V. — Second de la doctrine théorique, et intitulé : *Des cercles excentriques, ou de la théorie des planètes.*

Chapitre I : Combinaison des facultés de la planète et de la force

motrice du Soleil, qui détermine une orbite elliptique dont le Soleil occupe un des foyers. Nécessité de la notion de l'arc et de l'angle ayant son sommet au foyer. Énoncé de la *loi des aires :* les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles aux temps.

Chapitre II : Définitions des termes usités en Astronomie; ces définitions sont très-nécessaires pour l'intelligence des écrits de Kepler. Les termes qu'il a employés, et le sens qu'il faut leur attacher, diffèrent quelque peu de ceux que les astronomes ont adoptés de nos jours : *Excentricus, linea apsidum, libratio, anomaliæ media, eccentri et coæquata; locus eccentricus. æquatio vel prosthaphæresis.* Cette *équation* est composée de deux termes, dont l'un dépend de l'inégalité physique et réelle du mouvement, et l'autre de l'égalité optique et apparente.

Kepler termine le Livre par l'explication de l'inclinaison de l'orbite et du mouvement des apsides et des nœuds.

Livre VI. — *Des mouvements apparents des planètes.*

1° Du mouvement du Soleil. L'inégalité apparente du Soleil, prouvée par les observations, provient de la variation de distance de cet astre à la Terre, ainsi que l'atteste la variation du diamètre apparent. Détermination de l'excentricité. Tycho l'avait déduite de la différence des durées de l'été et de l'hiver. L'emploi de la variation de diamètre du Soleil durant ces deux saisons constitue une méthode plus élégante, mais trois observations d'une planète conduisent à un résultat plus précis.

Définition de l'anomalie annuelle de Copernic. Définition des années égyptienne, julienne et grégorienne.

2° Des trois planètes supérieures, Saturne, Jupiter et Mars, et des généralités communes aux deux planètes inférieures. Leur mouvement s'accorde parfaitement avec la théorie elliptique au moment de leur opposition vraie; en dehors de cette position, on observe de petites irrégularités dont on peut corriger l'influence en les réduisant en Tables.

3° Des planètes inférieures, Vénus et Mercure, et de leurs élongations.

4° De la Lune. Le mouvement de notre satellite n'est pas soumis à toutes les inégalités du mouvement des planètes : ainsi on n'y

observe pas de stations. Théorie des inégalités du mouvement lunaire (variation, équation annuelle).

5° Des affections communes des planètes, considérées en totalité ou en certain nombre.

Au milieu de considérations astrologiques et astronomiques développées dans ce Chapitre, on trouve quelques mots sur les années lunaires politiques, la théorie des éclipses de Lune et de Soleil, et les proportions harmoniques des orbites des planètes.

Livre VII, relatif, à la fois, à la doctrine sphérique et à la doctrine théorique.

Du mouvement de la huitième et de la neuvième sphère (des fixes). Kepler rappelle le mouvement de précession des équinoxes et l'expose avec détails; « mais les véritables inclinaisons des planètes sur l'écliptique, les causes et les valeurs des mouvements, des limites et des nœuds, tout cela, dis-je, et toutes choses semblables, resteront comme questions à résoudre dans l'âge futur, et ne pourront être apprises avant que Dieu, arbitre des siècles, n'ait révélé ce Livre aux mortels ».

Ces réflexions terminent l'Ouvrage, puis viennent 95 Notes et additions des éditeurs avec les extraits des Tables Rudolphines.

Le même volume renferme les *Tables Rudolphines*, préface et lettres à ce sujet, jugement d'Horoccius, forme et disposition des Tables, dédicace à Ferdinand II, préface et résumé analytique du contenu des Tables.

Cet Ouvrage n'est pas reproduit en détail, parce qu'il n'offre pas une grande utilité pratique, les Tables d'éphémérides et de logarithmes étant arrivées aujourd'hui à un degré de perfection très-marqué.

L'éditeur s'est donc borné à donner des extraits des Chapitres les plus importants, avec quelques spécimens de la disposition des Tables. Le travail est terminé par le Chapitre relatif à l'usage des Tables Rudolphines dans les supputations astrologiques, suivant une méthode nouvelle et naturelle.

Nous trouvons enfin, dans ce sixième volume, l'examen des observations de J. Regiomontanus et de B. Walther; discussion des positions des cinq planètes observées par ces deux astronomes, durant la période 1461 à 1504.

Ce n'est pas précisément un recueil didactique, mais plutôt une série de Notes éparses dans les manuscrits de Poulkova, et qui se rapportent aux sujets traités dans la préface des Tables Rudolphines. C'est pourquoi l'éditeur a cru devoir les réunir dans ce Volume.

Tome VII. 1868.

Le septième Volume renferme les écrits de Kepler sur les comètes, les logarithmes, les éphémérides astronomiques et météorologiques, la correspondance relative à ces divers objets d'études, et enfin divers commentaires historiques.

En voici l'énumération complète :

Aussführlicher Bericht... Description détaillée de la comète apparue en septembre et octobre 1607. Halle, 1608. La question de la nature des comètes n'est guère plus avancée de nos jours encore que du temps de Kepler. Ce dernier, n'ayant pu observer que deux comètes, supposa que leur trajectoire était rectiligne. Les observations anciennes n'étaient pas assez exactes pour permettre de corriger l'erreur ainsi commise.

C'est dans cet Ouvrage que nous trouvons la comparaison du nombre des comètes dans le ciel à celui des poissons dans l'Océan. Cette idée est généralement attribuée à Kepler; Stobée en est le véritable auteur (*voir*, à ce sujet, la *Science pour tous*, année 1876, p. 52. *Essai historique sur la théorie des étoiles filantes, des bolides et des comètes*).

Après ce Traité vient celui des comètes, divisé en trois Livres, traduction latine et commentaire du précédent (1618).

Dans le Livre I (astronomique), Kepler établit la forme rectiligne de la trajectoire des comètes de 1607 et 1618. Il appuie sa recherche sur trente propositions qui forment la première Partie de ce Livre. La seconde Partie est consacrée à la discussion des observations faites en 1607, de la parallaxe diurne de cet astre, et enfin de treize conclusions confirmant la nature de l'orbite.

Description détaillée des trois comètes de 1618; observations de l'auteur.

Chapitre II : Indication de la route suivie par la comète de 1618.

Chapitre III : Huit propositions au sujet du mouvement de la dernière comète de 1618. Appendice de neuf paragraphes.

Livre II (Physique), contenant la *Physiologie* nouvelle des comètes.

Kepler admet que les comètes proviennent de la condensation de l'éther sous l'influence d'une certaine force. Il affirme que les comètes sont lumineuses par elles-mêmes et qu'elles se résolvent sous l'action des rayons du Soleil, qui repousse et illumine en même temps la matière de leurs queues. Il explique enfin leurs divers aspects et les singularités de formes qu'elles présentent parfois.

Livre III (astrologique) ou de la signification des comètes de 1607 et de 1618.

Kepler ne nie pas qu'une comète puisse toucher la Terre. Il attribue à la substance qu'elle répand alors dans l'atmosphère la cause de maladies épidémiques régnant sur une plus ou moins grande partie de l'univers. Il suppose aussi que les comètes exercent d'autres influences sur les hommes et sur la Terre.

Signification des comètes de l'année 1619.

Notes de l'éditeur.

Hyperaspistes Tychonis. — Réponse de Kepler à un libelle de Scipion Claramontius, professeur à Pérouse et à Pise, intitulé *Antitycho,* dans lequel Scipion établit que les comètes sont des satellites de la Terre, et non des corps célestes.

L'*Hyperaspistes,* paru en 1625 à Francfort, se divise en plusieurs paragraphes où est développée la réfutation de divers passages de l'*Antitycho.* Nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire de les indiquer ici avec détails.

Il est suivi de l'*Appendix Hyperaspistis, seu spicilegium ex trutinatore Galilæi*, autre discussion sur le même sujet.

Des Notes de l'éditeur complètent ces divers Ouvrages.

Nous arrivons maintenant à un important Traité de Kepler intitulé : *Chiliade de Logarithmes,* précédée de l'exposition rationnelle de la recherche et de l'emploi des logarithmes (Marbourg, 1624).

Voici la division de cet Ouvrage :

Supplément de la chiliade de logarithmes.

Exposé de la nature des logarithmes.

Chapitres I à V : Divisions de la Table.

Chapitre VI : Opérations effectuées au moyen des logarithmes.

Chapitre VII : Applications à la Trigonométrie rectiligne et sphérique.

Chapitre VIII : Problèmes sur la recherche des logarithmes et sur le retour des logarithmes aux nombres.

Chapitre IX : Applications à l'Astronomie.

Chiliade de logarithmes.

Appendices. — I. Trente propositions sur les logarithmes énoncés dans les Tables Rudolphines (neuf Chapitres).

II. Notes des Tables de J. Bartschius sur les logarithmes de Kepler.

De ephemeridibus. — Série d'Ouvrages renfermant l'indication des mouvements célestes pour les années 1617 à 1636, et, en particulier, les éphémérides des éclipses de Soleil et de Lune.

Marginalia ex ephemeridibus ad annos 1617-1636. — Observations de l'état du temps, de l'aspect et de l'influence des planètes pour les divers jours de cette période de vingt ans.

Commentaire de Kepler sur une lettre du P. J. Terrentius, S. J., missionnaire en Chine, adressée aux mathématiciens d'Europe, 1630.

Discours de Kepler sur la grande conjonction de Saturne et de Jupiter dans le signe du Lion, en juillet 1623 (all.), Linz, 1623.

Strena, seu de nive sexangula. Francfort, 1611. Remarques sur la cristallisation hexagonale de la neige.

Extraits des manuscrits de Poulkova :

1° *De motu terræ*, Traduction et annotations, en allemand, de divers passages d'Aristote.

2° *In libellum Sleidani de quatuor monarchiis* (1596), Dissertation sur l'Histoire sainte.

3° *De origine gentium ex Mose,* Essai historique et géographique.

4° *De septuaginta hebdomadibus in Daniele,* Commentaire des Prophéties (35 pages).

Tome VIII. 1870-1871.

Les derniers Ouvrages de Kepler, ainsi que les fragments retrouvés dans les manuscrits de l'Observatoire de Poulkova, ont

été réunis dans le huitième et dernier volume de cette édition des OEuvres complètes.

Voici l'énumération de ces divers Ouvrages ou fragments, composant la première Partie du Tome VIII :

Astronomischer Bericht... Description astronomique des éclipses de Lune observées dans l'année 1620, qui vient de s'écouler, suivie de l'étude des grandes éclipses de Soleil observées depuis 1544. Ulm, 1621.

Somnium seu de Astronomia lunari. — Songe de Kepler ou *Précis de l'Astronomie lunaire* (Ouvrage posthume). Francfort, 1634, édité par Louis Kepler fils. Ce petit écrit est une fantaisie astronomique sur l'aspect de la Terre vue de la Lune, et sur la nature et les productions de notre satellite. 123 Notes, écrites de 1620 à 1630 complètent cette description. *Voir,* à ce sujet, *les Mondes imaginaires et les mondes réels,* par M. C. Flammarion, 1870, p. 320 et seq.

Plutarchi de facie quæ in orbe Lunæ apparet, traduction latine du Livre de Plutarque sur la figure humaine dessinée sur la Lune, avec 137 Notes du traducteur.

Catéchisme du Saint-Sacrement, du Corps et du Sang de N.-S. Jésus-Christ. (all.), composé par Kepler pour ses enfants, etc. Prague, 1617.

Élégies en vers latins.

Kepler a composé une de ces élégies à la mémoire de Tycho Brahe, son digne précurseur.

Les *Fragments* sont classés dans les catégories suivantes :

I. *Mathématiques.* — Notions d'arithmologie élémentaire. Nombre polygonaux (latin). Notion des logarithmes (all.). Divisibilité (latin).

Institutionum geometricarum liber II. Fragments sur la Géométrie plane et sur les solides réguliers.

Énoncés de théorèmes.

II. *Histoire et Philologie* (lat. et all.). Étymologies de quelques noms propres tirés de Tacite.

Traduction allemande du premier Livre des Commentaires de César (douze paragraphes) ; le reste manque.

Fragments divers.

III. *Astronomie.* — Des triangles sphériques. Premières recherches sur la loi des aires. Préface des troisième et quatrième Parties du Livre du mouvement de Mars. Fragments. Notes sur des écrits de Scaliger.

IV. *Astrologie.* — Fragments (lat. et all.). Analyse du Pronostic de Paul Sutorius. Horoscopes de l'empereur Rodolphe et de Wallenstein.

Judicium matris Kepleri. — Dossier complet du procès intenté à Catherine Guldenmann, épouse d'Henri Kepler, père de l'astronome Jean Kepler (200 pages all.).

Ce document termine la série complète des Œuvres de Kepler. On voit que tout ce qui pouvait intéresser à cet homme illustre a été précieusement recueilli.

Près de cinq cents pages, composant la seconde Partie du tome VIII, ont été consacrées à la biographie de Kepler, et sont divisées en Chapitres dont voici la substance :

I. Histoire de l'Astronomie au XVIe siècle. De l'état où se trouvait l'Astronomie lorsque Kepler entreprit ses travaux.

II. Biographie de Kepler suivant l'ordre chronologique.

III. De la famille de Kepler.

De ses amis et de ses protecteurs.

Étude et discussion de la correspondance de Kepler.

Index rerum et auctorum. — Table analytique, extrêmement utile, qui facilite les recherches et les comparaisons (115 pages).

Toute la seconde moitié du huitième Volume est le fruit des recherches de l'éditeur lui-même. Ce long travail dénote chez son auteur les qualités d'une vaste érudition et un soin attentif à donner les faits précis, base de toute étude sérieuse. Les réflexions qui terminent ce magnifique ensemble en font saisir le caractère général.

Voici comment s'exprime M. le Dr Frisch, après avoir rapporté l'éloge que M. J. Bertrand a fait des Œuvres de Kepler :

« Arrivé au terme de notre Ouvrage même, nous avons toujours regardé comme plus à propos de citer l'appréciation de Kepler faite par d'autres que nous, que de conclure en reproduisant des extraits de ses Œuvres. Nous avons, en effet, consacré trente années

et plus à coordonner et à terminer ce travail. Doit-on s'étonner, après cela, que nous ayons hésité à formuler un jugement sur le génie qui a été si longtemps et si continuellement présent à notre esprit et à nos regards. Il pouvait arriver, en effet, que l'éditeur et l'interprète des Œuvres de Kepler n'eût pas le jugement impartial et indépendant. Pour éviter tout soupçon de cette nature, nous avons préféré que d'autres vinssent parler à notre place.

» Que le lecteur reste donc bien persuadé que, seul, un sentiment d'admiration pour un homme aussi éminent que Kepler nous a déterminé à entreprendre, à poursuivre et à accomplir une tâche aussi ardue. Puisse notre travail être accepté comme un signe et un témoignage de profonde vénération, dû et offert à la mémoire d'un savant illustre, et puisque, depuis huit mois déjà, le bronze a perpétué son souvenir dans son village natal, qu'il me soit permis de faire les vœux les plus ardents pour que ce monument littéraire ne soit pas jugé indigne du monument élevé à sa mémoire! »

H. B.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

REVUE D'ARTILLERIE. — Recueil paraissant le 15 de chaque mois.

Le premier numéro de cette publication périodique a paru le 15 octobre 1872.

Ainsi que l'explique l'Avant-Propos, la nouvelle Revue a pour objet principal de tenir les officiers d'artillerie au courant des questions qui sont à l'étude dans leur arme, et particulièrement de celles qui sont soumises à l'examen du Comité; elle doit leur donner, sur le personnel et le matériel de l'artillerie, tous les renseignements jugés utiles, et offrir en même temps aux travaux individuels une large publicité.

Les documents insérés dans cette Revue se composent d'articles variés sur les diverses questions relatives au personnel et surtout au matériel, d'articles traduits des différentes Revues étrangères; d'extraits des rapports du Comité; de communications diverses d'un intérêt général pour l'arme (organisation des commissions

d'expériences; essais entrepris dans différents centres d'artillerie); d'études bibliographiques, etc.

Chaque numéro renferme, en outre, et avec pagination distincte, des renseignements extraits du journal militaire officiel, partie réglementaire et promotions, etc.

Chaque année forme ainsi trois Volumes, un par semestre pour la partie technique, et un troisième pour la partie officielle et administrative.

On trouve, dans les six premiers Volumes, d'intéressantes études sur l'artillerie étrangère, sur la tactique de l'arme pendant la guerre de Bohême (1866) et pendant la campagne de France 1870-71; sur la fabrication des armes et du gros matériel; sur le tir des pièces nouvelles, etc., etc.

Dans l'analyse succincte que nous allons faire de cette publication, nous nous bornerons à signaler plus particulièrement les Mémoires ou travaux dans lesquels les recherches mathématiques tiennent une place plus ou moins large. Il en est, dans le nombre, de très-recommandables par la difficulté des recherches auxquelles ils ont donné lieu.

Tome I. (Octobre 1872-mars 1873.)

Jouffret et Manceron. — *Description des artilleries prussienne, autrichienne, anglaise et russe.*

Sarrau. — *Sur les expériences de Rumford et la loi suivant laquelle la tension des produits de la combustion de la poudre dépend de leur densité.* (8 p.)

Les expériences de Rumford datent de 1797. Elles ont été faites à l'arsenal de Munich, et décrites dans le Traité d'artillerie du général Piobert.

La discussion attentive des expériences de Rumford a conduit M. Sarrau à admettre, pour les résultats de ce physicien, une fraction discontinue de la densité. En prenant pour abscisses les inverses des racines cubiques des densités, la courbe des pressions est représentée par quatre segments de droite.

Tome II. (Avril-septembre 1873.)

Manceron, Jouffret et Jouart. — *Description des artilleries russe, suisse et italienne.*

Page. — *De la dérivation.* (12 p.)

Étude théorique, fondée sur les principes mathématiques les plus simples. L'auteur applique ses recherches au mouvement du gyroscope et de la toupie, et arrive à cette conclusion, qu'on parviendrait à supprimer la dérivation ou tout au moins à la rendre à peu près nulle, si l'on pouvait augmenter la vitesse angulaire.

Creuzet de Latouche. — *Étude sur la construction des bouches à feu de l'artillerie moderne.* (2 articles.)

Noble. — *Sur la pression nécessaire pour donner le mouvement de rotation aux projectiles des canons rayés.* (16 p.)

Jouffret. — *Sur l'établissement et l'usage des Tables de tir.* (20 p.)

Considérations générales, calculs relatifs aux points moyens. Interpolation. Méthode des moindres carrés, formulée d'abord par Legendre (1804), puis rattachée par Laplace au Calcul des probabilités. Formule de compensation des dérivations.

Tome III. (Octobre 1873-mars 1874.)

Jouffret. — *Sur l'établissement et l'usage des Tables de tir* (suite). (22 p.)

Équations normales qui servent de point de départ à la méthode des moindres carrés. Leur résolution par les coefficients indéterminés.

Méthode d'interpolation par laquelle s'obtient directement le polynôme qui satisfait aux deux conditions de représenter les observations avec un écart moyen moindre que tout autre polynôme de même degré, et d'avoir le degré le moins élevé parmi tous les polynômes pour lesquels cet écart moyen est inférieur à la limite donnée.

Loi de formation d'une série remarquable signalée d'abord par M. Tchebychef. Démonstration élémentaire de cette série, rattachée par M. Hermite à celle de Lagrange.

Règles pratiques de calcul des différences.

Astier. — *Du tir en brèche à grande distance contre des maçonneries couvertes.*

Application des formules du tir plongeant.

Jouffret. — *Sur l'établissement et l'usage des Tables de tir* (suite et fin). (20-17-15 p.)

Des diverses opérations analytiques qu'on peut faire au moyen de la Table de tir. Intercalation. Différentiation. Intégration.

Calcul, au moyen de la Table, des éléments qui n'ont pas été observés, mais qui sont néanmoins déterminés en vertu des résultats et des expériences, tels que les hausses verticale et horizontale. Angle de chute. Zone dangereuse. Vitesse d'arrivée. Durée du trajet.

Équation de la projection verticale de la trajectoire. Point culminant. Justesse du tir. Résistance de l'air.

Résumé et observations complémentaires.

Cette intéressante monographie des Tables de tir a fourni à l'auteur la matière d'un savant travail qui démontre que cette question est subordonnée à l'emploi de considérations analytiques parfois très-délicates.

Tome IV. (Avril-septembre 1874.)

Jouart. — *Balistique intérieure expérimentale, d'après G. Ellena.* (18 p.)

Des méthodes indirectes pour la recherche expérimentale des tensions intérieures.

Résultats des expériences faites en 1867 par le général Mayevski.

Jouffret. — *Théorie élémentaire du mouvement du gyroscope, de la toupie et du projectile oblong.* (20 p.)

On considère généralement la question de l'effet des forces sur un

corps tournant comme peu susceptible d'être traitée autrement que par une analyse élevée. La méthode exposée dans ce travail, où cette question est rattachée à celle des pressions qu'un corps tournant exerce sur ses appuis, fournit une solution permettant à toute personne de comprendre et de prévoir ces effets singuliers, dont la connaissance s'impose aujourd'hui à l'artilleur.

Examen de l'influence déviatrice générale sur le mouvement des corps, résultant de la rotation de la Terre.

Conséquences relatives à la théorie des vents alizés, à la rotation diurne des vents, à la direction du gulf-stream, à l'effet du courant des fleuves sur une rive ou sur l'autre, selon l'hémisphère; à la déviation des projectiles.

Phénomènes de *précession* et de *nutation* observés dans la rotation de la Terre. Mouvement du gyroscope.

Jouart. — *Balistique expérimentale d'après G. Ellena* (suite et fin). (16 p.)

Méthodes de mesure directe de la tension des gaz dans l'âme.

Méthode des cylindres. Mesureur Rodman. Appareil de M. Noble, appelé aussi *crusher*.

Jouffret. — *Théorie élémentaire du mouvement du gyroscope* (fin). (11 p.)

Conséquences relatives au projectile oblong. Mouvement de la toupie. De nombreuses figures, intercalées dans le texte, facilitent la lecture de cet intéressant Mémoire, comme de celui du même auteur sur les Tables de tir.

Tome V. (Octobre 1874-mars 1875.)

Perrodon. — *Sur un appareil destiné à figurer le mouvement des projectiles oblongs dans l'air.* (14 p., 4 fig.)

Duchêne. — *Sur une question de balistique expérimentale.* (20 p.)

Recherches tentées dans le but de prolonger les Tables de tir jusqu'à la portée maxima pour les plus grandes charges.

Considérations théoriques. Angles de tir. Hausses. Dérivations.

Dérives. Angles de chute. Vitesses restantes. Durées de trajet. Tables de tir.

ASTIER. — *De l'influence de la rotation terrestre sur les écarts du tir.* (10 p.)

SIACCI. — *Sur les principes du tir.* (2 art., 17-7 p.)

ANDRÉ. — *Détermination de quelques éléments des solides de révolution.* (6 p.)

Tome VI. (Avril-septembre 1875.)

DUCHÊNE. — *Sur la dépendance mutuelle des divers éléments d'un système d'artillerie.* (27 p.)

Tome VII. (Octobre 1875-mars 1876.)

JOUART. — *Le marteau-pilon de 50 tonnes de Perm.* (11 p., 1 pl.)

MANNHEIM. — *Note sur le tir lorsque le but est élevé au-dessus de l'horizon.* (5 p.)

SIACCI. — *Sur une question de balistique.* (4 p.)

Proposition extraite d'un nouveau Mémoire, dans lequel l'auteur relie très-heureusement l'une à l'autre la balistique expérimentale et la balistique théorique. H. B.

ČASOPIS PRO PĚSTOVÁNÍ MATHEMATIKY A FYSIKY (1).

T. IV; 1875.

STUDNIČKA (F.-J.). — *Sur l'origine et le développement de la théorie des nombres.* (46 p.)

L'auteur donne un court aperçu historique de l'origine et déve-

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 122.

loppement de la théorie des nombres : son Mémoire se divise en deux Parties, dont la première comprend l'intervalle depuis les premiers commencements connus de l'antiquité jusqu'à Fermat, la seconde l'intervalle depuis Fermat jusqu'à ces derniers temps. La clarté de l'exposition est encore rehaussée par des citations heureusement choisies.

Čubr (E.). — *Sur les mesures de la Terre* [suite et fin (1)]. (5 art., 37 p.)

Fin du travail commencé dans le Volume précédent.

Hejzlar (Fr.). — *Sur les courbes caustiques.* (4 p.)

Dans ce court article, l'auteur démontre d'une manière élémentaire que l'enveloppe de tous les rayons lumineux refléchis, tombés parallèlement à l'axe sur un miroir sphérique, dans un plan passant par l'axe, est une épicycloïde.

Seydler (A.). — *Sur le passage de Vénus devant le Soleil, le 8 décembre* 1874. (2 art., 19 p.)

Courte exposition populaire de la méthode de Halley et des moyens fournis par les travaux les plus récents pour la détermination de la parallaxe du Soleil.

Studnička (F.-J.). — *Sur les séries de sommes en general, et sur les nombres figurés en particulier.* (2 art., 15 p.)

Exposition des propriétés les plus importantes des nombres figurés et particulièrement des nombres polygonaux et polyédraux.

Studnička (F.-J.). — *Démonstration des formules fondamendales de la Trigonométrie sphérique au moyen de quelques théorèmes sur les déterminants.* (9 p.)

A l'aide de quelques propositions empruntées à la théorie des déterminants et à la Géométrie analytique, l'auteur établit d'une manière élégante et générale les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique. L'article se termine par un coup d'œil historique sur le développement de cette branche des Mathématiques.

Pánek (A.). — *Sur la somme des nombres cubiques.* (3 p.)

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 129.

L'auteur établit une expression de la somme

$$\sum_{0}^{n} (c + nb)^3;$$

d'où résulte, comme cas particulier, la formule pour la somme des cubes.

Hromádko (F.). — *Démonstration analytique de la construction des normales à l'ellipse.* (2 p.)

Studnička (F.-J.). — *Comment les Arabes résolvaient les équations du troisième degré de la forme* $x^3 - Px + Q = 0$. (4 p.)

Article rédigé d'après Hankel.

Studnička (F.-J.). — *Éléments de la théorie des nombres.* (4 art., 62 p.)

L'auteur développe d'une manière très-claire la théorie de la divisibilité des nombres, leurs propriétés les plus importantes, le calcul des congruences, avec son application aux équations indéterminées du premier degré.

Šolín (J.). — *Éléments d'Arithmographie* (fin). (18 p.)

Conclusion d'un article commencé dans le Volume précédent. L'auteur y traite de la solution graphique des équations biquadratiques, de la différentiation et de l'intégration graphiques, de la détermination graphique des aires et des volumes.

Studnička (F.-J.). — *Le calcul des fractions chez les Romains.* (6 p.)

D'après Hankel.

Studnička (F.-J.). — *Théorie mathématique des gaz.* (3 art., 28 p.)

Rédigé d'après Lang. (*Einleitung in die theoretische Physik.*)

Vaňaus (J.-R.). — *Sur une interprétation de l'équation de la parabole.* (6 p.)

Cette Note indique comment on peut établir une dépendance entre la résolution des équations quadratiques et la parabole.

Pánek (A.). — *Méthode élémentaire pour l'étude des courbes dans le plan.* (2 art., 19 p.)

Dans cette Note, écrite pour les élèves de l'enseignement moyen l'auteur indique d'une manière élémentaire des méthodes pour l'étude de la forme générale des courbes planes, et éclaircit son exposition par des exemples.

Hromádko (F.). — *Remarque sur la somme des nombres carres.* (1 p.)

Jarolímek (Č.). — *Sur la construction, par la Géométrie descriptive, de l'intersection des droites avec les courbes du second degré données par leurs axes.* (7 p.)

Le problème proposé est résolu par la considération des figures dans l'espacè, pour la parabole, l'hyperbole et l'ellipse.

Vaňaus (J.-R.). — *Sur le mouvement des projectiles.* (5 p.)

Hromádko (F.). — *Comment on peut doubler la puissance d'un courant galvanique.* (4 p.)

Blažek (G.). — *Remarque sur le calcul de l'intérêt composé.* (1 p.)

Nouvelle démonstration de la formule

$$A = a\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

T. V; 1876.

Studnička (F.-J.). — *Sur l'origine et le développement de la théorie des déterminants.* (2 art., 13 p.)

L'auteur donne un aperçu complet de tous les travaux qui ont contribué à la création et au perfectionnement de cette théorie, à commencer par les agrégats symboliques dont il est question dans la correspondance entre Leibnitz et l'Hospital, jusqu'à notre époque.

Zahradník (K.). — *Géométrie du cercle, à l'usage des élèves de l'enseignement moyen.* (3 art., 31 p.)

Kuchynka (M.). — *Sur les principes scientifiques de l'art du dessin, depuis son origine jusqu'au milieu du XVe siècle.* (2 art., 11 p.)

Hromádko (F.). — *Remarque sur les équations quadratiques.* (2 p.)

Coutre Note relative au cas où une racine d'une équation qua-

dratique devient infinie, et à la moyenne harmonique des deux racines.

Plašil (J.). — *Une analogie goniométrico-physique*. (3 p.)

Si l'on écrit dans les sextants d'un cercle les fonctions *sin*, *tang*, *séc*, *cosèc*, *cot*, *cos*, ce schéma donne lieu à plusieurs propositions, qui peuvent se réduire aux trois suivantes.

1. Le produit des fonctions opposées est égal à l'unité.

2. Le produit de deux fonctions, prises alternativement de deux en deux, est égal à la fonction située entre les deux facteurs.

3. Le produit de trois fonctions alternées de deux en deux est égal à l'unité.

Des propositions analogues, très-faciles à trouver, ont lieu maintenant relativement aux six couleurs principales du prisme, inscrites de la même manière dans un cercle, l'unité ayant naturellement pour analogue la couleur blanche.

Studnička (A.). — *Nouveaux phénomènes produits par la lumière*. (2 p.)

D'après *The Engineer*. Il s'agit des actions répulsives que M. Crookes avait cru constater dans les rayons lumineux.

Bečka (B.). — *Détermination de la valeur du produit imaginaire*

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)}.$$

(2 p.)

L'auteur démontre que ce produit a pour valeur $i\left(=\sqrt{-1}\right)$.

Šimerka (V.). — *Sommes des entiers contenus dans une progression arithmétique fractionnaire*. (9 p.)

L'auteur détermine la somme des entiers contenus dans un nombre donné de termes de la progression arithmétique

$$\frac{a+b}{n},\quad \frac{2a+b}{n},\quad \ldots,\quad \frac{\omega a+b}{n},$$

et applique le résultat obtenu à la détermination du nombre des

Hoza (F.). — *Les intérêts composés et le calcul des rentes, pour les élèves de l'enseignement moyen.*

Pánek (A.). — *Contribution au calcul des probabilités.*

Baudys (V.). — *Théorie de l'arc-en-ciel secondaire.*

Durrande (H.). — *Sur l'application des déterminants à la théorie des moments des forces. Traduit par K. Zahradnik.*

Traduction d'un Mémoire publié en 1873 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (¹).

Hromádko (F.). — *Sur la probabilité de l'existence des rayons ultra-rouges dans le spectre solaire.*

Si l'on observe, au moyen de l'érythroscope (de Wild), le spectre solaire projeté sur un écran blanc, dans un lieu obscur, on aperçoit le spectre prolongé au-dessus de son extrémité rouge.

Studnička (F.-J.). — *Sur le développement de notre littérature physique pendant les cinquante dernières années.*

Coup d'œil sur les travaux publiés sur cette science en langue bohême.

Pánek (A.). — *Sur quelques théorèmes de Trigonométrie, pour les élèves de l'enseignement moyen.*

Plch (P.-C.). — *Équation de l'ellipse rapportée à deux diamètres, appropriée à la théorie des vibrations elliptiques.*

Ces deux volumes contiennent en outre des problèmes de Mathématiques et de Physique avec leurs solutions, des annonces et des comptes rendus des nouvelles publications. Ed. W.

(¹) Voir *Bulletin*, t. VI, p. 187.

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES ABSOLUMENT INTÉGRABLES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES, ET SUR L'INTÉGRATION SIMULTANÉE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES (1);

PAR M. A. MAYER, à Leipzig.

Toute équation linéaire aux différentielles partielles du premier ordre est équivalente à un certain système d'équations différentielles ordinaires. De la même manière, il existe, entre les systèmes d'équations linéaires aux différentielles partielles du premier ordre, admettant une solution commune, et certains systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales, une dépendance réciproque facile à reconnaître, qui, du reste, a déjà été plusieurs fois remarquée et utilisée dans des cas spéciaux, par exemple dans la méthode d'Ampère pour l'intégration des équations aux différentielles partielles du second ordre qui ont une intégrale intermédiaire.

Soient, en effet, les $m-1$ équations simultanées aux dérivées partielles

$$\text{(I)} \qquad A_1(f)=0, \quad A_2(f)=0, \ldots, \quad A_{m-1}(f)=0,$$

dans lesquelles on a, en général,

$$A_i(f)=\frac{\partial f}{\partial x}+a_m^i\frac{\partial f}{\partial x_m}+\ldots+a_n^i\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

les coefficients a_k^i étant des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si ces équations admettent une solution commune f, cette solution sera toujours, en même temps, et quelles que soient les fonctions arbitraires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, une solution de l'équation linéaire aux différentielles partielles

$$\lambda_1 A_1(f)+\lambda_2 A_2(f)+\ldots+\lambda_{m-1}A_{m-1}(f)=0,$$

et, par conséquent, en l'égalant à une constante arbitraire, f sera

une intégrale des $n-1$ équations différentielles ordinaires

$$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{m-1} : dx_m : \ldots : dx_n$$
$$= \lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_{m-1} : \sum_{h=1}^{h=m-1} \lambda_h a_m^h : \ldots : \sum_{h=1}^{h=m-1} \lambda_h a_n^h,$$

et partant aussi une intégrale des $n-m+1$ équations linéaires aux différentielles totales

$$\text{(II)} \qquad dx_k = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h\, dx_h, \quad (k = m, m+1, \ldots, n),$$

que l'on obtient par l'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ entre les précédentes, et l'on voit immédiatement que, réciproquement, si les équations (II) admettent une intégrale $f =$ const., c'est-à-dire s'il existe une fonction f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont la différentielle s'annule identiquement en vertu des seules équations (II), cette fonction est une solution commune des équations (I).

Le problème de trouver une solution commune des $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles (I) est, d'après cela, identique avec le problème de trouver une intégrale des $n-m+1$ équations linéaires aux différentielles totales (II). En conséquence, on doit s'attendre à ce que toute méthode conduisant à l'intégration des équations (II) devra aussi contenir le germe d'une méthode d'intégration pour les équations (I). C'est cette idée qui a donné lieu aux recherches suivantes, dont le but principal est de trouver une voie par laquelle on puisse arriver, par le moindre nombre possible d'intégrations, à trouver une solution commune de plusieurs équations linéaires simultanées aux différentielles partielles du premier ordre d'une même fonction inconnue.

On peut d'ailleurs introduire préalablement une simplification importante. En effet, ainsi que l'a fait voir Clebsch ([1]), tout système d'équations aux différentielles partielles de cette forme, qui admet généralement une solution commune, pouvant se ramener à

([1]) *Journal de Crelle*, t. 65, p. 257.

un système *jacobien*, c'est-à-dire, en particulier, à un système de la forme (I), dans lequel les opérations A satisfont aux $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ identités suivantes :

$$\text{(III)} \qquad A_i[A_k(f)] - A_k[A_i(f)] = 0,$$

il suffit alors de considérer les systèmes d'équations aux différentielles totales dont les coefficients satisfont aux conditions qui résultent des identités (III).

Ces systèmes jouissent de la propriété d'être satisfaits par $n-m+1$ intégrales, et l'on peut d'abord montrer que leur intégration revient à l'intégration complète de $m-1$ systèmes chacun de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, comme l'a déjà remarqué M. Natani [1], dans l'hypothèse d'un système d'équations aux différentielles totales admettant le nombre indiqué d'intégrales.

Mais, par une transformation des équations données, pareille à celle qui a servi à M. P. du Bois-Reymond pour ramener les équations linéaires aux différentielles totales intégrables par une seule équation à une seule équation différentielle ordinaire du premier ordre, entre deux variables [2], on peut faire en sorte que l'intégration du premier de ces $m-1$ systèmes suffise déjà pour l'intégration des équations données, ce qui ramène en même temps la solution complète du système jacobien équivalent à l'intégration complète d'un seul système de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Il en résulte enfin, ce qui est beaucoup plus important dans les applications, que, pour la détermination d'une solution commune du système jacobien, il n'est indispensable de connaître qu'une seule intégrale de ce système d'équations différentielles ordinaires; ainsi, par exemple, le nombre d'intégrales dont on a besoin pour la solution complète d'une équation non linéaire aux différentielles partielles du premier ordre est, abstraction faite de la première, égale précisément à la moitié du nombre d'intégrales dont la connaissance était nécessaire dans la meilleure des anciennes méthodes, celle de Weiler et Clebsch [3].

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 58, p. 30.
(2) *Journal de Crelle*, t. 70, p. 312.
(3) *Journal de Crelle*, t. 65, p. 263.

§ I.

Conditions d'intégrabilité absolue.

On est conduit aux systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales, que nous considérerons exclusivement dans ce qui va suivre, en égalant à des constantes arbitraires $n - m + 1$ fonctions quelconques, indépendantes entre elles, de n variables x_1, x_2, ..., x_n, et prenant les différentielles totales des équations ainsi obtenues.

La résolution des équations dérivées par rapport à $n - m + 1$ des n différentielles donne $n - m + 1$ équations différentielles simultanées de la forme

$$(1) \qquad dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} a_i^k dx_i \quad (k = m, m+1, \ldots, n),$$

dans lesquelles a_i^k sont des fonctions données de toutes les n variables, et auxquelles, par suite de leur mode de formation, on pourra satisfaire en prenant pour x_m, x_{m+1}, ..., x_n des fonctions convenables des variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_{m-1}, fonctions qui contiendront encore de plus $n - m + 1$ constantes arbitraires. Pour pouvoir m'exprimer plus brièvement, je donnerai à un tel système d'équations linéaires aux différentielles totales (1) le nom de *système absolument intégrable*.

Étant proposé, réciproquement, un système d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme (1), on peut se demander d'abord sous quelles conditions il sera absolument intégrable, et ensuite, quand ces conditions sont remplies, comment on pourra l'intégrer.

Pour qu'il existe $n - m + 1$ fonctions x_m, x_{m+1}, ..., x_n des variables indépendantes x_1, x_2, ..., x_{m-1} satisfaisant identiquement aux équations données (1), il faut que, h et i désignant deux nombres quelconques, différents entre eux, de la suite 1, 2, ..., $m - 1$, on ait, pour ces fonctions,

(2) [illegible]

et par suite, en indiquant par la caractéristique d que, dans la différentiation, $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ doivent être considérés comme des fonctions de x_k et de x_i, pour lesquelles ont lieu les relations (2), il faut que l'on ait

$$\frac{da_k^h}{dx_i} - \frac{da_k^i}{dx_h} = 0,$$

c'est-à-dire que ces fonctions satisfassent aux équations

$$(3) \qquad \frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda}\right) = 0.$$

Si l'on emploie la notation $A_i(f)$ pour désigner généralement l'opération

$$(4) \qquad A_i(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^i \frac{\partial f}{\partial x_\lambda},$$

les équations (3) pourront s'écrire plus simplement de cette manière :

$$(5) \qquad A_i(a_k^h) - A_h(a_k^i) = 0.$$

Ces conditions, au nombre de $\frac{(n-m+1)(m-1)(m-2)}{2}$, doivent être satisfaites, d'après cela, par les fonctions $x_m, \ldots, x_n$ des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_{m-1}$, qui résolvent les équations (1). Mais si, comme on le suppose ici, ces fonctions doivent contenir $n-m+1$ constantes arbitraires, cela ne pourra avoir lieu que si ces conditions sont déjà identiques par elles-mêmes.

La vérification identique des relations (3) ou (5) est donc nécessaire dans tous les cas pour que les équations (1) soient absolument intégrables. Cette condition est, de plus, suffisante, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, où l'on montrera comment, dans la supposition des identités (3), on peut déterminer $x_m, \ldots, x_n$ en fonction de $x_1, \ldots, x_{m-1}$ et de $n-m+1$ constantes arbitraires, de manière à satisfaire identiquement aux équations (1).

En attendant, je ferai encore remarquer que, comme on a, en

vertu de (4),

$$A_i[A_k(f)] - A_k[A_i(f)] = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} [A_i(a_\lambda^k) - A_k(a_\lambda^i)] \frac{\partial f}{\partial x_\lambda},$$

les identités (5) entraîneront aussi les suivantes :

$$(6) \qquad A_i[A_k(f)] = A_k[A_i(f)],$$

qui ont lieu pour toute fonction f, et qui, réciproquement, peuvent remplacer les conditions (5).

§ II.

Réduction du système (1), lorsque les relations (3) ont lieu identiquement, à $m-1$ systèmes de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Lorsqu'on a en général $n-m+1$ fonctions $x_m, \ldots, x_n$ des variables indépendantes $x_1, \ldots, x_{m-1}$ satisfaisant aux équations (1), elles devront d'abord satisfaire aux $n-m+1$ équations

$$(7) \qquad \frac{\partial x_m}{\partial x_1} = a_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} = a_{m+1}^1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_1} = a_n^1.$$

Ces équations, dans lesquelles $x_2, \ldots, x_{m-1}$ n'entrent que comme des constantes, forment un système de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires entre $x_m, \ldots, x_n$ et x_1.

Si donc les équations

$$(8) \quad \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) = c_\lambda, \quad (\lambda = m, m+1, \ldots, n)$$

sont $n-m+1$ intégrales de ce système, indépendantes les unes des autres, les solutions $x_m, \ldots, x_n$ des équations (1) doivent être contenues dans les équations (8), dans lesquelles les constantes d'intégration c_λ ne peuvent dépendre que de $x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Les équations (8), étant les intégrales complètes du système (7), peuvent être toujours résolues par rapport à $x_m, \ldots, x_n$. On peut donc utiliser ces relations pour introduire $c_m, \ldots, c_n$ comme de nouvelles variables à la place de $x_m, \ldots, x_n$.

Des équations (8) on tire, en différentiant complétement, et substituant les valeurs données par les équations (1),

$$dc_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} \left(\frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial\varphi_\lambda}{\partial x_k}\right) dx_h.$$

Or ici le coefficient de dx_1 est identiquement nul, puisque les équations (8) sont, par hypothèse, des intégrales du système (7). En faisant usage de la notation (4), il restera donc simplement

$$dc_\lambda = \sum_{h=2}^{h=m-1} A_h(\varphi_\lambda)\, dx_h.$$

De ces $n-m+1$ équations, dans les seconds membres desquelles on remplacera $x_m, \ldots, x_n$ par leurs valeurs résultant des équations (8), on devra tirer les nouvelles variables $c_m, \ldots, c_n$.

Mais, pour que les équations (8) continuent à être des intégrales du système (7), il faudra que les c_λ deviennent indépendants de x_1; donc x_1 ne devra pas entrer dans les équations (9).

C'est en effet ce qui a lieu; car, comme on a, d'après (6),

$$A_1[A_h(\varphi_\lambda)] = A_h[A_1(\varphi_\lambda)]$$

et

$$A_1(\varphi_\lambda) = 0,$$

il en résulte que $f = A_h(\varphi_\lambda)$ est aussi une solution de l'équation $A_1(f) = 0$; autrement, $A_h(\varphi_\lambda) =$ const. est une intégrale du système (7). Aussi, lorsqu'on aura substitué pour $x_m, \ldots, x_n$ leurs valeurs provenant des intégrales (8), les expressions $A_h(\varphi_\lambda)$ seront indépendantes de x_1

Les équations (9) sont donc toutes indépendantes de x_1, et *ne peuvent par conséquent pas changer, quelle que soit la valeur que l'on y attribue à cette variable.*

Le système donné (1) est maintenant ramené au système (9), qui contient encore $m-2$ variables indépendantes. Ce dernier système ne peut évidemment être établi en général [c'est-à-dire tant que l'on ne précise pas davantage le système d'intégrales des équations (7) au moyen duquel les quantités c_λ ont été introduites comme

constantes d'intégration, qu'après que l'on a trouvé ces intégrales. Mais, si l'on prend pour les c_i un système déterminé de constantes d'intégration des équations (7), savoir les valeurs initiales des variables dépendantes, on obtient le grand avantage de pouvoir former les équations (9) avant toute intégration.

On peut reconnaître ce fait directement sur les équations (9); mais il se manifeste plus clairement encore quand on prend pour point de départ un autre système d'équations équivalent au système (9).

Désignons par

$$(10) \qquad x_i = \psi_i(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, c_m, \ldots, c_n)$$

les résultats que l'on obtient en résolvant les intégrales (8) suivant $x_m, \ldots, x_n$, ou les solutions complètes des équations différentielles (7). Si l'on introduit directement, au moyen des équations (10), les quantités c_i comme nouvelles variables dépendantes dans les équations (1), on aura maintenant, pour déterminer les c_i, les équations

$$(11) \qquad \sum_{i=m}^{i=n} \frac{\partial\psi_i}{\partial c_i} dc_i = \sum_{k=1}^{k=m-1} \left(a_k^i - \frac{\partial\psi_i}{\partial x_k}\right) dx_k,$$

dans lesquelles on devra exprimer aussi, à l'aide des substitutions (10), les a_k^i au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, c_m, \ldots, c_n$, et par la formation desquelles on aura gagné ceci, que ces substitutions rendront identiques les équations

$$a_k^i - \frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_k} = 0.$$

Si l'on résout ces $n - m + 1$ équons paitar rapport à $dc_m, \ldots, dc_n$, on devra retomber sur les équations (9). On pourra donc remplacer ces dernières par les équations (11), et comme, d'après ce qui précède, les équations (9) ne contiennent pas x_1, il sera permis d'*attribuer directement, dans les équations* (11), *avant même de les résoudre, à la variable* x_1 *une valeur arbitraire,* pour laquelle ces équations restent encore résolubles.

Cela établi, soient maintenant

$$(12) \qquad x_k = \chi_k(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0)$$

les solutions complètes des équations (7), exprimées au moyen de x_1 et des valeurs $x_m^0, \ldots, x_n^0$ des variables dépendantes $x_m, \ldots, x_n$, qui correspondent à la valeur initiale x_1^0 de x_1. Cette valeur initiale x_1^0 peut être choisie arbitrairement; seulement il faut, pour que les valeurs correspondantes des variables dépendantes restent arbitraires, qu'aucune des quantités a_k^1 ne puisse, pour cette valeur, devenir infinie ou indéterminée. Les expressions χ_k, représentant les valeurs qui résultent pour les variables x_k de la résolution des équations suivantes, conséquences des intégrales (8),

$$\varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) = \varphi_\lambda(x_1^0, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0),$$

ont alors la propriété de se réduire à x_k^0 pour $x_1 = x_1^0$.

Par conséquent, si, dans le système

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda^0} dx_\lambda^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} \left(a_k^h - \frac{\partial \chi_k}{\partial x_h}\right) dx_h,$$

qui se déduit de (1) quand on introduit par les substitutions (12), comme nouvelles variables, à la place des quantités $x_m, \ldots, x_n$, leurs valeurs initiales $x_m^0, \ldots, x_n^0$, x_1 pouvant d'ailleurs prendre, d'après ce qui précède, une valeur quelconque, on pose $x_1 = x_1^0$; il se réduit au suivant :

$$(13) \qquad dx_k^0 = \sum_{h=2}^{h=m-1} a_k^{h0} dx_h,$$

dans lequel a_k^{h0} représente ce que devient a_k^h lorsqu'on remplace les quantités $x_1, x_m, \ldots, x_n$ par $x_1^0, x_m^0, \ldots, x_n^0$.

C'est à l'aide de ces $n - m + 1$ équations (13), qui peuvent être établies, comme on le voit, avant toute intégration du système (7), que l'on déterminera les valeurs initiales, considérées comme des fonctions de $x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Les équations (13) forment un nouveau système tout à fait sem-

blable aux équations données (1), seulement avec une variable indépendante x_1 de moins; car, puisque, par hypothèse, on a identiquement

$$\frac{\partial a_k^h}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k^i}{\partial x_k} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^i \frac{\partial a_k^h}{dx_\lambda} - a_\lambda^k \frac{\partial a_k^i}{\partial x_\lambda} \right) = 0,$$

on a aussi identiquement

$$\frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_k}{\partial x_k} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(a_\lambda^{i0} \frac{\partial a_k^{h0}}{\partial x_\lambda^0} - a_\lambda^{k0} \frac{\partial a_k^0}{\partial x_\lambda^0} \right) = 0.$$

Le système (13) remplit donc aussi les conditions de l'intégrabilité absolue. On pourra, par conséquent, opérer sur ce second système exactement comme sur le système donné, c'est-à-dire que l'on pourra, par l'intégration d'un second système de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, le ramener à un système complétement intégrable, ne contenant plus que $m - 3$ variables indépendantes, et ainsi de suite; de sorte que finalement, après l'intégration de $m - 1$ systèmes, chacun de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, et pouvant chacun s'établir et se traiter indépendamment des autres, on parviendra à l'intégration complète du système donné (1), et l'on obtiendra, par un système récurrent de formules, $x_m, \ldots, x_n$ au moyen de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et des $n - m + 1$ constantes arbitraires du dernier de ces $m - 1$ systèmes.

(*A suivre.*)

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HATTENDORFF (KARL). — SCHWERE, ELECTRICITÄT UND MAGNETISMUS, NACH DEN VORLESUNGEN VON BERNHARD RIEMANN (¹). — 1 vol. in-8°. Hannover, 1876.

Les physiciens désiraient depuis longtemps la publication d'un livre vraiment classique, où l'on pût étudier la théorie de l'électricité. Les leçons de Riemann donneront pleine satisfaction à leur vœu. Il y trouveront réunies, sous un faible volume, toutes les notions essentielles qu'ils étaient obligés de chercher dans des ouvrages de longue haleine, comme celui de Clerk Maxwell, et cela sous une forme plus claire, plus méthodique que dans aucun des Traités qui sont entre leurs mains. L'auteur, mathématicien avant tout, écarte de la rédaction de son livre toute préoccupation relative à la théorie des instruments ou des méthodes de mesure. Ces questions, d'un intérêt essentiellement pratique, se trouvent suffisamment traitées ailleurs pour qu'on n'ait pas à regretter leur suppression. La rédaction y gagne même d'être beaucoup plus vivante et le lecteur peut plus aisément embrasser d'un coup d'œil l'ensemble de ces questions difficiles.

M. Hattendorff nous offre les Leçons professées par Riemann à l'Université de Göttingue, pendant le semestre d'été de 1861. En dehors de quelques notes assez courtes, l'auteur n'a pas laissé de manuscrit sur ce sujet. L'éditeur se déclare seul responsable pour la disposition et la rédaction de l'Ouvrage. Malgré quelques redites que l'on aurait peut-être pu éviter sans nuire à la clarté, M. Hattendorff a droit à toutes nos félicitations pour la manière dont il a accompli sa tâche.

« L'accueil favorable fait par les savants compétents à ma publication des leçons de Riemann sur les équations aux différences partielles », nous dit-il dans une courte préface, « me fait espérer que le nouveau livre trouvera grâce auprès des amis de Riemann, et des personnes qui se livrent à l'étude des Mathématiques.

» Comme pour les équations aux différentielles partielles, nous

(¹) Gravitation, électricité et magnétisme, d'après les leçons de Bernard Riemann, publié par Karl Hattendorff.

devons aussi beaucoup à Lejeune-Dirichlet dans le sujet actuel. Au nombre des services qu'il a rendus à la Science, il ne faut pas oublier que c'est à lui que l'on doit d'avoir introduit dans les Universités allemandes l'étude des équations différentielles et du potentiel. Les matières qu'il a traitées dans ses Leçons constituent encore aujourd'hui une part essentielle de nos programmes d'enseignement.

» Venu après Dirichlet, Riemann a dû nécessairement lui emprunter beaucoup. Cependant il ne s'est pas borné à recueillir l'héritage de son illustre devancier. Le lecteur compétent trouvera qu'il y a ajouté beaucoup du sien. »

Ce serait rendre un vrai service aux personnes qui s'intéressent à la Physique mathématique de leur faire connaître, par le détail, les matières traitées dans ce Volume. Obligé de nous borner au plus essentiel, nous tâcherons d'insister plus particulièrement sur les parties originales de l'œuvre de Riemann, ou sur les points qui sont les moins connus en France.

Les Leçons de Riemann sont divisées en deux Parties. Dans la première, l'auteur étudie les lois générales relatives à la *fonction potentielle* et au *potentiel*. Dans la seconde, il expose les données physiques de la science de l'électricité et du magnétisme, et il apprend à former les équations générales qui résolvent les problèmes fondamentaux, relatifs à chaque subdivision de ces sciences.

Nous insisterons peu sur la première Partie. Les matières que l'on y traite ont été récemment vulgarisées par la publication d'un certain nombre d'Ouvrages élémentaires et sont assez connues des physiciens français (1). Nous y relèverons cependant plusieurs points dignes de fixer l'attention.

La fonction potentielle $V = \Sigma \frac{m}{r}$ (2), et ses dérivées du premier et du second ordre font l'objet du premier Chapitre de la première Partie. On y remarque l'étude approfondie du cas où la masse attractive est répandue sur une surface, ou distribuée le long d'une courbe. Dans le premier cas, et quand le point attiré est situé sur

---

(1) Signalons le Livre de Clausius : *Die Potentialfunction und das Potential*, traduit par Folie (in-8°; 1870. — Paris, Gauthier-Villars), et l'excellent *Traité d'électricité statique* de M. Mascart.

(2) Appelée le plus souvent en France *le potentiel* ou *premier potentiel*.

la surface attirante, les dérivées premières de la fonction potentielle présentent d'intéressantes particularités. La dérivée $\frac{\partial V}{\partial s}$, prise par rapport à un déplacement situé dans le plan tangent, possède une valeur finie et déterminée, infiniment peu différente de celle qui convient à un déplacement parallèle pour un point extérieur, très-voisin de la surface; cependant la composante tangentielle de l'attraction est absolument indéterminée. Au contraire, pour un déplacement normal à la surface, la dérivée $\frac{\partial V}{\partial p}$ est indéterminée, et l'on a, en désignant par ρ la densité de la matière attractive au point considéré de la surface,

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{-0} = -4\pi\rho;$$

cependant la composante normale de l'attraction garde une valeur déterminée. Cet exemple est bien choisi pour montrer qu'il n'est pas permis dans tous les cas de confondre les dérivées de la fonction potentielle et les composantes de l'attraction.

Le deuxième Chapitre, intitulé : *Loi de Green,* contient l'exposé de la méthode générale donnée par Green pour former l'expression du potentiel en un point quelconque intérieur à une surface fermée T, quand on donne sa valeur en tous les points de cette surface, et que l'on connaît dans l'intérieur de T la valeur que prend en chaque point la somme $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$. Après avoir exposé les cas particuliers de l'ellipsoïde et du cylindre elliptique homogènes, enfin d'une sphère hétérogène, l'auteur étudie les propriétés générales de la fonction auxiliaire U introduite par Green. Dans son *Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme,* l'illustre analyste n'établit pas que, pour chaque forme particulière de l'espace S compris dans la surface T, il existe une fonction U et une seule satisfaisant aux conditions imposées. Il s'en rapporte simplement à la signification physique de la fonction U : « Pour nous convaincre », dit-il, « qu'il existe une fonction V telle que nous l'avons admise, concevons que la surface S soit un conducteur parfait en relation avec la terre, et qu'une unité d'électricité positive se trouve concentrée au

point p'; alors la fonction potentielle totale produite par p' et par l'électricité induite sur la surface sera la valeur cherchée de U. »

Gauss a comblé cette lacune de la théorie de Green, mais la preuve qu'il fournit n'est pas purement analytique : sa forme est empruntée à la théorie même de la fonction potentielle. Enfin Dirichlet a donné une démonstration purement analytique; Riemann la reproduit et l'applique plus tard au potentiel électrodynamique.

Il termine en démontrant que la fonction V qui obéit à l'équation de Laplace n'a ni maximum ni minimum.

Le potentiel (¹) forme l'objet du troisième et dernier Chapitre. L'auteur établit que, quand les composantes X, Y, Z de la force agissant au point dont les coordonnées sont x, y, z sont les dérivées partielles d'une même fonction mV qui ne dépend directement que des coordonnées (et par suite ne contient pas la variable t d'une manière explicite), la variation de la force vive correspondant à un déplacement quelconque est égale à la variation de la fonction mV. C'est le principe de la conservation de la force vive pour un point matériel. Le même principe s'applique sous les mêmes conditions à un système quelconque de points, libre ou non. La fonction P, dont la variation représente le travail élémentaire, est le potentiel. Elle jouit de cette propriété, que sa valeur est égale au travail produit par le transport de tous les points du système depuis l'infini jusqu'à leurs positions actuelles, indépendamment du chemin suivant lequel s'est opéré le transport. Cette propriété peut, si l'on veut, servir de définition au potentiel. On verra, par la suite, comment la notion de potentiel est susceptible d'être étendue, quand les composantes des forces agissantes sont fonctions des vitesses de tous les points du système.

Les généralités précédentes suffisent pour permettre d'aborder les problèmes soulevés par l'étude de la gravitation. Nous allons voir, dans la seconde Partie de l'Ouvrage, comment on les adapte aux besoins spéciaux d'autres branches de la Science. Comme premier exemple, nous analyserons succinctement le Chapitre *Électrostatique*.

Après avoir défini les corps conducteurs et non conducteurs et énoncé la loi de Coulomb, l'auteur pose ainsi le problème général

---

(¹) Appelé quelquefois *second potentiel*.

à résoudre : *Étant donnés un certain nombre de corps isolants dans lesquels la distribution électrique est connue, et en outre k conducteurs dont les charges respectives sont m_1, m_2, ..., m_k, on demande de déterminer la distribution électrique sur ces conducteurs quand le système est en équilibre.*

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les valeurs constantes de la fonction potentielle V à l'intérieur des k conducteurs à l'état d'équilibre. Soit de plus u_1 une fonction de x, y, z qui dans tout l'espace obéit à la loi de Laplace

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0,$$

et dont la valeur à la surface et dans l'intérieur du premier conducteur soit égale à 1 ; soient $u_2, u_3, \ldots, u_k$ les fonctions analogues pour les autres conducteurs. Alors la différence

$$(3) \qquad V - (a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k) = w$$

est une fonction nulle à l'intérieur et à la surface de tous les conducteurs, qui en tous les points extérieurs aux corps isolants obéit à l'équation de Laplace, et qui, dans l'intérieur des isolants, donne la densité électrique par la même relation que la fonction potentielle V. On a

$$(4) \qquad \frac{\partial V}{\partial p} = a_1 \frac{\partial u_1}{\partial p} + a_2 \frac{\partial u_2}{\partial p} + \ldots + a_k \frac{\partial u_k}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial p}.$$

Prenons maintenant l'intégrale [1]

$$\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q = \int \rho \, d\sigma_q,$$

étendue à la surface entière du neuvième conducteur, et posons, pour abréger,

$$(5) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \left(\frac{\partial u_i}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q = \mu_{qi}, \\[2ex] \dfrac{1}{4\pi} \displaystyle\int \left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)_{+0} d\sigma_q = \nu_q. \end{cases}$$

---

[1] On a $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{-0} = 0$, puisque dans l'intérieur du conducteur la force agissante est nulle. Par suite, d'après (1), $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{+0} = 4\pi\rho$, puisqu'il s'agit de forces répulsives.

Les équations (1) deviennent

$$(6)\quad \begin{cases} m_1 = \mu_{1,1} a_1 + \mu_{1,2} a_2 + \ldots + \mu_{1,k} a_k + \nu_1, \\ m_2 = \mu_{2,1} a_1 + \mu_{2,2} a_2 + \ldots + \mu_{2,k} a_k + \nu_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ m_k = \mu_{k,1} a_1 + \mu_{k,2} a_2 + \ldots + \mu_{k,k} a_k + \nu_k; \end{cases}$$

ce sont les équations générales du problème. On démontre que l'on a, en général,

$$\mu_{i,q} = \mu_{q,i},$$

et l'on trouve sans peine la signification physique des diverses constantes contenues dans les équations (6). Il ne reste plus qu'à les résoudre par rapport aux inconnues $a_1, a_2, \ldots$.

Riemann choisit ensuite comme exemple le cas de deux sphères, traité d'abord mathématiquement par Poisson et plus tard par Plana, et géométriquement par W. Thomson. La méthode qu'il emploie est toute personnelle. Elle est, en quelque sorte, la traduction analytique de la méthode des images électriques de Thomson. On sait que l'image électrique d'un point P extérieur à une sphère du rayon a et situé à une distance r du centre, est un point P situé sur le rayon qui aboutit en ce point, et tel que sa distance r' au centre est donnée par la relation

$$rr' = a^2.$$

La propriété physique qui les caractérise est la suivante. Soit une unité d'électricité en P, et la sphère en communication avec le sol; la distribution électrique produite par induction sur la sphère peut être remplacée, au point de vue de son action à l'extérieur, par une charge $\frac{a}{r}$ supposée concentrée au point P'. On démontre aisément que l'image électrique d'une sphère A dans une sphère B extérieure à A est une sphère C intérieure à B; de même l'image de C dans A est une sphère intérieure à A, et ainsi de suite.

Le principe de la méthode de Riemann consiste à chercher quelles sont les charges qu'il faudrait supposer appliquées aux centres des deux sphères et à leurs images électriques en nombre infini, pour produire, à l'extérieur des deux sphères, la fonction potentielle résultant de leurs charges réelles. Le problème ainsi posé est, a

priori, susceptible d'une solution unique et parfaitement déterminée, puisque toutes les images considérées sont intérieures à l'une ou à l'autre sphère, et que si la fonction V est variable et contenue à l'extérieur des deux conducteurs sphériques, et prend réellement, à partir de leur surface interne, deux valeurs constantes g et h, rien ne s'oppose à ce que l'on prolonge la fonction potentielle à l'intérieur de ces conducteurs en la laissant variable et continue, sauf en des points déterminés, et d'après telle loi que l'on voudra. Convenons que, si la fonction potentielle a pour valeur V' en un point quelconque extérieur P, elle aura pour valeur V'_1 au point P qui est son image dans la sphère A,

$$(7) \quad (V'_1 - g) = -\frac{r}{a}(V' - g), \quad \text{et} \quad (V'_1 - h) = -\frac{r}{b}(V' - h),$$

au point qui est son image dans la sphère B. A chaque point intérieur correspond une valeur définie de V'_1, sauf aux points contenus dans l'image de la sphère (2) dans la sphère (1), et de même dans l'image de la sphère (1) dans la sphère (2); V'_1 est d'ailleurs infini au centre de chaque sphère [1], où l'on devra, par conséquent, supposer placée une première masse électrique. A l'aide de V'_1 on continuera la formation de la fonction potentielle dans les images de premier ordre, à l'exception des points contenus dans les images de deuxième ordre et ainsi de suite; et à chaque centre la fonction potentielle se trouvera infinie et l'on devra supposer placée une nouvelle masse électrique.

Toute l'analyse qui suit consiste à déterminer les coordonnées et les charges des images successives. Quand on les a obtenues, et par suite qu'on a l'expression de la fonction potentielle V', on n'a pas de peine à exprimer la densité électrique en chaque point de la surface des deux sphères.

Le Chapitre II de la seconde Partie est l'exposition de la théorie des courants de Kirchhoff [2], qui conduit pour les courants linéaires constants aux lois de Ohm et de Joule.

Le Chapitre III est plus intéressant. Après avoir énoncé la loi

---

[1] Le centre d'une sphère est l'image des points situés à l'infini.

[2] *Voir* VERDET, *Théorie mécanique de la chaleur*, tome II.

élémentaire des actions magnétiques. L'auteur admet comme principe démontré par l'expérience que les actions magnétiques exercées par un courant obéissent, extérieurement au courant lui-même, aux mêmes lois que si elles provenaient de masses magnétiques, sur la situation desquelles, d'ailleurs, on ne préjuge rien. Il donne ensuite à la fonction potentielle des actions électromagnétiques une forme particulière sous laquelle elle est susceptible de deux interprétations remarquables, l'une mécanique, l'autre géométrique.

1° Limitons une surface courbe quelconque au contour du conducteur linéaire du courant, et fermons-la en lui adjoignant une deuxième surface parallèle à la première et infiniment voisine. On peut remplacer le courant d'intensité I, au point de vue de son action électromagnétique, par deux distributions magnétiques de signe contraire et de densité $\frac{I}{\varepsilon}$, recouvrant les deux faces de la surface S; ε est la distance constante de ces deux faces.

2° La valeur de la fonction V en un point P, extérieur au courant, est égale à l'angle solide sous-tendu en ce point par le courant, multiplié par l'intensité I. Ce produit doit être affecté du signe + si, pour l'observateur placé en P, le sens du courant est le sens de la marche des aiguilles d'une montre, et du signe — si c'est le sens contraire.

Cette dernière interprétation de l'expression de la fonction V permet de la transformer en une intégrale dont l'élément différentiel contient en facteur la longueur ds de l'élément de courant. Les dérivées par rapport à x, y, z de cet élément d'intégrale doivent représenter les composantes de l'action électromagnétique de l'élément de courant. On obtient ainsi la loi élémentaire connue des actions électromagnétiques.

On peut maintenant, à l'aide de l'interprétation mécanique de V développée ci-dessus, remplacer un courant par un aimant, et inversement, et l'on formera sans peine l'expression du potentiel électrodynamique. Il suffit alors de lui donner la forme d'une intégrale dont l'élément contient en facteur les longueurs ds et $d\sigma'$ de deux éléments appartenant respectivement aux deux courants que l'on considère, et leurs intensités I et I', pour que cet élément d'intégrale représente le travail élémentaire correspondant à l'action réciproque des deux éléments de courant. On obtient ainsi

la loi d'Ampère. Toute cette analyse est extrêmement intéressante.

Le Chapitre IV, relatif à l'induction, est d'une concision et d'une netteté remarquables. L'auteur démontre en peu de mots la nécessité des phénomènes d'induction. S'attachant ensuite au cas de l'induction voltaïque, il en établit la loi par les considérations suivantes :

Le potentiel P, relatif à deux courants constants d'intensité I et I', peut être mis sous la forme

$$P = -II'Q, \tag{8}$$

Q étant un facteur qui ne dépend que des positions relatives des deux courants. Le travail élémentaire électrodynamique correspondant à un déplacement infiniment petit des conducteurs est

$$-\,II'\frac{dQ}{dt}dt.$$

Admettons que cette expression représente toujours ce travail élémentaire, même quand I et I' sont variables. Cela exige d'abord que I et I' varient d'une manière continue.

Jusqu'ici nous avons appelé *potentiel* une fonction dépendant des coordonnées, et dont l'expression ne contient pas la variable t d'une manière explicite, telle que sa variation représente le travail accompli par une déformation quelconque du système. L'existence de cette fonction P est l'expression même de la loi de la conservation de la force vive.

Nous allons étendre la notion de potentiel à une fonction des coordonnées de tous les points d'un système *qui dépend aussi des vitesses de tous les points,* mais qui ne contient pas le temps d'une manière explicite. Dans ces conditions, le principe de la conservation de la force vive est encore applicable.

Il est aisé de voir que le travail électrodynamique

$$-\int_0^t II'\frac{dQ}{dt}dt$$

est une fonction explicite du temps, puisque I et I' sont des fonctions quelconques de cette variable. Le travail électrodynamique correspondant à des courants d'intensité variable n'admet donc pas le potentiel, même dans l'acception étendue que nous venons de

donner à cette expression. Si ce travail était le seul produit, le principe de la conservation de la force vive ne serait pas applicable aux phénomènes électriques.

Mais nous avons reconnu la nécessité d'admettre la production d'un travail électromoteur, pour expliquer les phénomènes d'induction. Nous allons déterminer ce travail par la condition que le travail total admette un potentiel, c'est-à-dire que le principe de la conservation de la force vive soit applicable aux phénomènes qui nous occupent. Il faut, pour cela, que l'élément d'intégrale représentant la somme du travail élémentaire électrodynamique et électromoteur soit une différentielle complète. Au terme $II'\frac{dQ}{dt}dt$, il faut ajouter les deux termes $I\frac{d\,I'Q}{dt}dt - I'\frac{d\,IQ}{dt}dt$. Cette somme est la différentielle de $II'Q$, et le potentiel est $-II'Q$. Le premier des deux nouveaux termes représente le travail électromoteur dans le conducteur du courant d'intensité I'; le second, le travail dans le conducteur du courant d'intensité I. Cette expression du travail électromoteur fournit l'énoncé de la loi de l'induction donnée par Neumann.

J'insisterai encore sur le Chapitre suivant, dont le titre est : *Loi fondamentale des actions électriques*. L'auteur, après avoir développé sous la forme complète le potentiel de l'action réciproque de deux courants, en tenant compte de l'induction, démontre que dans ce cas l'expression du travail élémentaire ne détermine pas complétement les forces motrices. On peut donc admettre plusieurs lois élémentaires différentes conduisant à la même expression du travail total. L'auteur en donne deux : l'une due à Weber, l'autre qui lui est propre.

Weber (¹) admet pour le potentiel élémentaire l'expression

$$-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right],$$

où r représente la distance des deux particules électriques de masses ε et ε', et $\frac{c}{\sqrt{2}}$ la quantité par laquelle il faut multiplier l'unité

(¹) WEBER, *Elektrodynamische Maassbestimmungen*, Theil 1.

électrostatique d'électricité pour obtenir l'unité électromagnétique. La loi élémentaire correspondante est représentée par

$$(9) \qquad \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c}\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Riemann admet, pour la forme du potentiel élémentaire l'expression

$$-\frac{\varepsilon\varepsilon'}{r}\left\{1 - \frac{1}{c^2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right]\right\},$$

dans laquelle (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) sont les coordonnées des deux particules électriques au temps t. Les composantes de la force élémentaire sont alors

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} X = {} & \frac{\varepsilon\varepsilon'}{r^2}\frac{dr}{dx} + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\,\frac{d\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)\right]}{dt} \\ & + \frac{\varepsilon\varepsilon'}{c^2}\frac{1}{r^2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right)^2\right], \end{aligned} \right.$$

et pour Y et Z les expressions analogues.

En l'absence d'expériences directes sur l'électricité en mouvement, on ne peut se décider pour une forme ou une autre que par des considérations d'ordre purement analytique. La loi élémentaire de Riemann conduit, soit pour l'action de toutes les particules ε' sur une particule ε, soit pour le mouvement de la particule ε, à des équations différentielles plus simples. Les deux lois élémentaires se réduisent d'ailleurs à la loi de Coulomb quand on suppose les particules électriques immobiles, et conduisent également à la loi d'Ampère quand on néglige la portion du potentiel fournie par les phénomènes d'induction.

Le dernier Chapitre relatif au magnétisme terrestre contient l'exposé de la méthode de Gauss [1] pour le développement de la fonction potentielle de l'aimant terrestre en série de fonctions sphériques, et pour l'évaluation approchée de cette fonction d'après une série d'observations de la déclinaison, de l'inclinaison et de l'intensité magnétiques en un certain nombre de lieux.

---

[1] *Voir* VERDET, *Conférences de Physique* faites à l'École Normale.

[illegible] — [illegible]

[illegible] de Munich [illegible] excellent Manuel de la [illegible] relatifs à [illegible] dans divers recueils. [illegible] nouvelles [illegible] des matériaux [illegible] écrire une histoire [illegible] summaire des [illegible] de M. [illegible] qu'il dédie, avec [illegible] B. Boncompagni.

[illegible] *depuis la Renaissance.* [illegible] — L'auteur donne d'abord le résumé de son histoire des polygones étoilés avant la Renaissance, qui a été publié dans le tome [illegible] du *Bullettino* de M. Boncompagni ; ensuite il analyse les [illegible] de Lucas de Burgo, [illegible], Pelletier, Clavius, Ramus, [illegible], Kepler, Schwenter, Broscius, Kepler et Jamnitzer. Entre ces divers auteurs, il faut surtout distinguer [illegible], Broscius, Jamnitzer et Kepler. Le premier a fait une classification de toutes les formes polygonales à quatre, cinq, six [illegible] que M. Günther explique probablement pour la première fois; le *second*, en voulant réfuter Ramus, a fait une étude assez approfondie des *polygones étoilés* : Jamnitzer a dessiné un polyèdre étoilé, et Kepler en a donné deux autres, en les considérant explicitement comme des polyèdres étoilés, contrairement à une opinion généralement admise en France.

Au XVIII[e] siècle, il faut citer parmi ceux qui s'occupent des polygones et des polyèdres, étoilés ou non, Meister, Lhuilier, Lexell, Euler; au XIX[e] siècle, Gauss, Möbius, Poinsot, qui trouve deux nouveaux polyèdres réciproques de ceux de Kepler (Poinsot cite Kepler, mais il ne semble pas l'avoir lu), Cauchy, qui prouve qu'il n'y a que quatre polyèdres réguliers étoilés,

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. X, p. 131.

Krause, Schröder, Jacobi, Hermes, Bertrand, Cayley, Wiener. M. Günther remarque, avec beaucoup de justesse, que ce n'est qu'au XIXᵉ siècle qu'un travail systématique comme celui de Poinsot était possible, parce qu'il suppose certains progrès de la théorie des nombres qui datent de la fin du XVIIIᵉ siècle. [Il ne cite pas le travail de Catalan sur les polyèdres semi-réguliers (*Journal de l'École Polytechnique,* Cahier XLI).

II. *Fractions continues ascendantes* (p. 93-136). *Définition.* — Elles comprennent les fractions décimales et sexagésimales : ainsi $4^{j}\,2^{h}\,4^{m}\,6^{s} = 4\frac{2}{24}^{+\frac{4}{60}^{+\frac{6}{60}}}$ jours. Hébreux, Grecs, Romains, Égyptiens, Indiens, Babyloniens, Ptolémée, Théon, Barlaam, Planudes, Alkasaldi, Léonard de Pise, Jean de Séville, Arzachel, Regiomontanus, Cardan, Buckley, Stevin, Prætorius, Lagrange, Lambert, Druchenmüller, Kunze, Hess, Scklömilch, Günther. Notes. Cette monographie, sur un sujet peu connu, contient maints détails curieux sur l'histoire du calcul décimal.

III. *Le parallélogramme de Newton et la règle de Cramer et Puiseux* (p. 136-187). — Newton a indiqué, le premier, une règle mécanique pour déterminer l'espèce d'un point singulier d'une courbe algébrique. Clebsch, dans sa Notice sur Plücker, a attribué cette règle à Cramer, et a fait remarquer qu'elle est identique avec celle de Puiseux. M. Günther a cru intéressant de faire l'histoire complète de ce procédé célèbre. Newton énonce sa règle sans démonstration et il croit qu'il est à peine nécessaire d'en donner une. Les commentateurs Colson, s'Gravesande, Stirling exposent plus au long la règle du grand géomètre ; mais ce sont Kästner et surtout Cramer qui, les premiers, la démontrent tout au long. Parmi ceux qui ont connu et employé la règle de Newton, on doit citer particulièrement Taylor et Lagrange, le dernier sous une forme purement analytique. (Soit dit en passant, ce point est signalé dans le *Cours d'Analyse* de M. Hermite, p. 31, note.) Les recherches de Puiseux, cent ans après Cramer, ont rappelé l'attention sur le parallélogramme, d'autant que la théorie des fonctions abéliennes touche de très-près à celle des courbes algébriques, ou plutôt se confond avec elle.

IV. *Études historiques sur les carrés magiques* (p. 188-270). — On ignore si les carrés magiques sont d'origine indienne comme

le dit La Loubère. Les astrologues arabes connaissaient ces carrés jusqu'à 9^2; ils les inscrivaient sur des talismans consacrés aux planètes d'où le nom de *carrés planétaires*. L'un des deux, Moschopule, auteur byzantin de la fin du moyen âge, écrivit sur les carrés magiques un Traité dont M. Günther publie, pour la première fois, le texte grec (p. 196-208). Dans le grand nombre d'auteurs dont il parle ensuite (Dürer, Agrippa, Paracelse, Théophraste, Riese, Stiefel, Schwenter, Spinola, Henisch, Roth, Lochner, Faulhaber, Remmelin), il faut distinguer Riese, qui trouva un procédé général pour les carrés à racine paire, et Stiefel qui fit connaître le moyen de construire les carrés magiques par enceintes. Au XVIIe et au XVIIIe siècle, nous citerons, parmi un grand nombre d'autres indiqués par M. Günther, Bachet de Meziriac qui trouve la méthode par terrasses; Frenicle, qui montre que le carré de 4^2 éléments peut être formé de 880 manières (Fermat, lettres à Mersenne, est oublié), la Hire et Poignard, Sauveur, D'Ons-en-Bray et Rallier des Ourmes, qui épuisent en quelque sorte la question des carrés magiques, telle qu'elle était posée de leur temps. Au XIXe siècle, Mollweide, Hohndell, Zuckermandell, Hugel et Pessl, en Allemagne, ont étudié sous une forme nouvelle ou plus systématique la formation de ces curieuses figures arithmétiques. En Angleterre, Horner, Drach, Thomson (Frost, Holditch) ont fait aussi des recherches sur le même sujet. Dans le cours de cette étude historique, M. Günther complète souvent les travaux qu'il analyse en donnant la démonstration des règles trouvées inductivement par divers auteurs.

V. *Sur l'histoire des logarithmes* (p. 271-290). — 1° Montucla et après lui beaucoup d'auteurs modernes confondent les logarithmes hyperboliques et les logarithmes népériens. M. Günther montre que cette erreur a été souvent réfutée, tant au siècle passé que de notre temps; il fait l'historique de cette réfutation et conclut comme suit : Neper n'avait pas l'idée de base d'un système de logarithmes, et la base implicite de son système n'était pas e. 2° Sur une méthode d'interpolation logarithmique de Jean Bernoulli III. 3° A. de Humboldt, dans sa jeunesse, Joseph Muschel de Moschau, Wolf, Hermann et Delambre ont proposé, sous une forme trigonométrique, des méthodes de calcul de $\log(a \pm b)$, au moyen de $\log a$, $\log b$, assez analogues à celles de Leonelli (*voir* encore un

crit très-curieux de Delambre, dans l'édition de Leonelli publiée écemment par M. Hoüel.)

VI. *Sur le calendrier juif* (p. 291-307). — Rectification d'une ssertion historique de Littrow.

VII. *Histoire des horloges à pendule avant Huygens* (p. 308-44). Cette Notice est une nouvelle édition complétement remaniée 'une monographie antérieure de M. Günther, publiée dans les *ulletins de la Société physico-médicale* d'Erlangen (6e cahier, . 12 et suiv.). Il examine soigneusement le parti que Galilée, ürgi et Hevelius ont tiré de l'isochronisme du pendule pour la iesure du temps et prouve qu'en réalité le vrai inventeur des horges à pendule est Huygens (M. Günther écrit toujours Huyghens, tort, d'après M. Chasles, *Rapport sur les progrès de la Géoméie*, p. 48) (1).

L'Ouvrage se termine par un *Index nominum* (p. 345-350) trèsigné, et deux pages d'additions et de corrections.

P. Mansion.

SCHERICH (G. von). — Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung. (*Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien*, LXIX. Bd., 1874.)

L'auteur étudie directement, d'après la méthode de Gauss, la éométrie des surfaces à courbure constante négative, laquelle oïncide, on le sait, avec la Géométrie du plan établie dans l'hypoièse non-euclidienne de Lobatchefsky et de Bolyai.

Après avoir retrouvé les relations connues entre les éléments 'un triangle, ainsi que l'expression de son aire, l'auteur introduit n système de coordonnées, analogue à celui que Gudermann a mployé pour la sphère, et au moyen duquel il arrive assez rapiement à l'équation de la ligne géodésique et à la distance de deux oints donnés par leurs coordonnées. La ligne géodésique ayant ne équation linéaire, ce système doit coïncider avec celui de 1. Beltrami (2), ce qui est, en effet, facile à vérifier directement.

---

(1) L'emploi du *gh* correspond à l'ancienne orthographe néerlandaise en usage au rıe siècle. Aujourd'hui on écrirait *Huijgens*. On sait d'ailleurs quelle indécision gnait à cette époque sur la manière d'écrire les noms propres. (J. H.)

(2) *Saggio d'interpretazione della Geometria non euclidea.*

Il est facile aussi de transformer la méthode de M. von Escherich, de manière à la rendre applicable aux trois dimensions, les droites remplaçant naturellement alors les lignes géodésiques, et cette transformation peut offrir une certaine utilité, comme moyen d'arriver le plus simplement possible à comprendre toute la partie *géométrique* des travaux de l'illustre géomètre italien cité plus haut.

La Géométrie analytique des surfaces à courbure constante négative, au moyen des coordonnées admises et de l'équation linéaire de la géodésique, est poussée plus loin ici que dans d'autres Ouvrages. Nous citerons, par exemple, le calcul de l'angle de deux géodésiques, celui des éléments linéaire et superficiel; les équations générales des tangentes et des normales, la détermination du rayon de courbure, enfin la discussion générale des courbes représentées, sur les surfaces en question, par des équations du second ordre.

Le Mémoire se termine par l'étude des propriétés projectives des figures, qui se conservent dans la Géométrie abstraite, ou, ce qui revient au même, dans toutes les surfaces à courbure constante. Cette étude est facilitée par le système de coordonnées employé, lequel permet la représentation de tous les points d'une surface à courbure constante au moyen des points d'un plan qui leur correspondent, c'est-à-dire qui ont les mêmes coordonnées, chaque droite du plan correspondant aussi à une ligne géodésique de la surface; ou, plus généralement, chaque ligne du plan correspondant à une ligne de même ordre dans la surface.

Ce mode de *correspondance*, dont l'idée n'est pas entièrement neuve, est simple et naturel, et l'on en conçoit *a priori* tous les avantages. Nous nous bornerons à faire observer :

1° Qu'il conduit à distinguer, lorsqu'il s'agit de l'intersection de deux lignes, les points de rencontre réels des points imaginaires et des points idéaux, ces derniers répondant au cas où les lignes analogues dans le plan se rencontrent, mais en un point qui n'a pas de correspondant sur la surface donnée.

2° Que les raisonnements présentés ici en général pour les surfaces à courbure négative peuvent être facilement transformés de manière à s'appliquer à la sphère; l'étude de la géométrie abstraite aura donc fait progresser non-seulement la Géométrie des pseudosphères, mais aussi celle de la surface sphérique elle-même.

J. D. T.

РОМЕРЪ (П.).— *Основныя начала метода кватерненовъ.* Кіевъ, въ университетской типографіи; 1868. Цѣна 2 руб. сереб. ([1]).

Cet Ouvrage, dont nous devons la connaissance à une obligeante communication de M. Imchenetsky, contient une exposition très-claire et très-complète de la doctrine d'Hamilton, la première qui ait paru sur le continent, en dehors des résumés sommaires donnés par MM. Allégret, Bellavitis et Hankel.

Il se divise en deux Parties, dont la première est intitulée : « Principes du calcul des quaternions ».

L'auteur part de la notion du *vecteur*, défini comme l'opération géométrique qui sert à déterminer la position d'un point B de l'espace au moyen de la distance de ce point à un point donné A et de la direction de la droite qui va de A vers B. Il expose les propriétés de l'addition et de la soustraction des vecteurs, leur décomposition suivant trois directions rectangulaires, etc.

Il définit ensuite le *quotient* $\frac{\beta}{\alpha}$ de deux vecteurs, comme l'opération qui consiste à passer du vecteur α au vecteur β. Cette transformation dépend de quatre quantités, d'où le nom de *quaternion* attribué au symbole de l'opération. L'auteur établit les règles de la multiplication des vecteurs unitaires rectangulaires i, j, k, d'où il déduit celles de la multiplication des vecteurs quelconques, puis des quaternions en général ; la propriété associative dans ce cas général est démontrée en s'appuyant sur la propriété associative de la multiplication des vecteurs unitaires i, j, k. Il donne les formules les plus importantes qui résultent de la multiplication des vecteurs et de l'emploi des signes S et V d'Hamilton. Il applique ces formules à la démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie plane et de la Trigonométrie sphérique.

Vient ensuite la théorie de la résolution des équations du premier degré en quaternions, au moyen de la fonction linéaire φ d'Hamilton. M. Romer explique comment cette fonction importante satisfait à une équation cubique, qui est la base de tant d'ap-

([1]) ROMER (P.). — *Principes fondamentaux de la méthode des Quaternions.* Kief, typographie universitaire, 1868. Prix : 2 roubles arg. — 1 vol. in-8°, 215 p. 4 pl. lith.

plications, et qui sert à exprimer une *déformation linéaire;* puis il traite de la différentiation et de l'intégration des quaternions.

La seconde Partie, composée de deux Sections, a pour objet les applications géométriques. La première Section est relative au problème concernant la ligne droite, le plan et les surfaces du second ordre, et l'auteur entre dans tous les détails nécessaires pour faire comprendre aux commençants cette théorie qui n'est pas sans présenter quelques difficultés quand on l'étudie pour la première fois dans les Ouvrages un peu trop concis d'Hamilton et de M. Tait.

Dans la seconde Section, l'auteur s'occupe des applications des quaternions à la Géométrie infinitésimale. Il traite successivement des lignes dans l'espace, de la courbure des surfaces, et termine par le calcul de la mesure de la courbure de Gauss et par l'étude des propriétés des lignes géodésiques.

Il est à souhaiter que M. Romer donne une suite à son remarquable travail, et consacre un second Volume aux applications des quaternions à la Mécanique et à la Physique. J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

УЧЕНЫЯ ЗАПИСКИ Имп. Казанскаго Университета (¹).

Année 1872.

Vinogradsky (V.-N.) — *De la détermination des orbites des étoiles doubles.* (60 p.)

Le problème de la détermination des orbites des étoiles doubles, quoique assez simple théoriquement, présente cependant de grandes difficultés pratiques, par suite des erreurs résultant de la petitesse extrême d'un des éléments observés.

Les observations directes des distances apparentes ρ de l'astre mobile à l'astre fixe et des angles de position θ permettent d'obtenir, à l'aide des formules $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, un certain nombre des

(¹) *Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Kazan.* Ces Mémoires, écrits en langue russe, sont publiés chaque année en plusieurs fascicules grand in-8°.

coordonnées orthogonales de la projection de l'orbite sur un plan perpendiculaire au rayon visuel de l'observateur, et passant par le centre de l'astre fixe. On peut donc, soit graphiquement, soit en substituant les valeurs de x et y dans l'équation générale des coniques, tracer ou calculer les éléments de la projection de l'orbite et en déduire l'angle du plan de l'orbite avec sa projection, la position des nœuds et enfin les éléments de l'orbite réelle.

Les premiers essais de solution de ce problème, faits par Savary (¹), sont fondés sur les propriétés des diamètres conjugués. Les éléments sont déterminés par un tâtonnement long et pénible. Encke (²) a cherché à modifier les formules de Savary; mais sa méthode, consistant dans la détermination des deux inconnues à l'aide des trois équations, conduit à des calculs répétés, très-pénibles, quoique un peu facilités par les Tables qu'il a dressées.

Sir John Herschel (³) a donné une solution purement géométrique. Sa méthode consiste dans le tracé d'une courbe représentative, ayant les époques d'observation pour abscisses et les angles de position pour ordonnées. Une fois cette courbe tracée, la connaissance de ses tangentes donne les variations de la vitesse angulaire et par conséquent les distances, avec lesquelles on peut construire la perspective de l'orbite, déterminer ensuite ses axes et le diamètre passant par l'astre fixe. En 1849, le même astronome (⁴) a indiqué une autre méthode où les éléments de l'orbite projetée ne sont plus déterminés graphiquement, mais par le calcul.

Presque en même temps, M. Yvon Villarceau, en partant du même principe que Herschel, a exposé, dans la *Connaissance des temps* pour 1852, une méthode analytique où, pour déterminer les éléments de l'orbite projetée, il développe ρ et θ, et par suite x et y en séries, en fonction des puissances du temps, et donne des formules exprimant les paramètres cherchés en fonction de x, y et de leurs dérivées.

Enfin Klinkerfues (⁵) a indiqué une méthode de détermination

(¹) *Connaissance des temps*, 1830.
(²) *Astronomisches Jahrbuch*, 1832.
(³) *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. V.
(⁴) *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. XVIII.
(⁵) *Ueber eine neue Methode, die Bahnen der Doppelsterne zu berechnen*. Göttingen, 1855.

8.

directe de l'orbite réelle, fondée sur l'égalité des rapports entre les aires des triangles dans cette orbite et les projections de ces aires.

Après cet aperçu historique de la question, M. Vinogradsky expose la méthode de Herschel, que nous reproduirons en quelques mots:

Soient r, v les coordonnées polaires de l'orbite réelle, et ρ et θ les coordonnées observées de l'orbite projetée; on a, d'après la deuxième loi de Kepler,

$$r^2\frac{dv}{dt}=k \quad \text{et} \quad \rho^2\frac{d\theta}{dt}=k\cos i=c^2,$$

i étant l'angle des projections. En supposant $\frac{d\theta}{dt}$ connue, et en posant $c^2=1$, on calculera une série des valeurs de ρ exprimées en fonction de cette unité arbitraire; on aura alors un certain nombre d'équations de la forme

$$\rho\,(\text{observé})=\frac{c}{\sqrt{\frac{d\theta}{dt}}} \quad \text{et} \quad \rho_1\,(\text{calculé})=\frac{1}{\sqrt{\frac{d\theta}{dt}}},$$

d'où

$$c=\frac{\Sigma\rho_1}{\Sigma\rho}.$$

Quant à $\frac{d\theta}{dt}$, on aura, en posant

$$\theta=A+Bt+Ct^2+Dt^3+\ldots,$$
$$\frac{d\theta}{dt}=B+2Ct+3Dt^2+\ldots,$$

une série d'équations à l'aide desquelles on déterminera les coefficients A, B, C,... soit par la méthode des moindres carrés, soit à l'aide des méthodes d'interpolation de Cauchy [1] ou de Tchebychef [2]. On calculera ensuite une série des valeurs de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$, correspondant aux époques d'observation $t_1, t_2, t_3, \ldots$; puis une série des valeurs de $x_1=\rho_1\cos\theta_1, \ldots, y_1=r_1\sin\theta_1, \ldots$;

---

[1] Cauchy, *Mémoire sur l'interpolation* (*Journal de Liouville*, IX, 1837). — Villarceau, *Méthode d'interpolation de M. Cauchy* (*Connaissance des temps*, 1852).

[2] *Sur l'interpolation par la méthode des moindres carrés* (*Mémoires de l'Académie de Saint-Pétersbourg*, t. I, 1859).

et l'on obtiendra ainsi un certain nombre d'équations

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2 + 1 = 0,$$

dans lesquels les coefficients α, β, γ, ... sont inconnus.

Les valeurs de ces coefficients peuvent être obtenues par la mé thode des moindres carrés, et, connaissant ces valeurs, on calculera sans difficulté les paramètres de la projection de l'orbite, lesquels étant connus, on pourra tracer cette projection, et par des considérations géométriques obtenir ensuite des formules donnant les valeurs des éléments de l'orbite réelle.

Les valeurs de ρ étant exprimées en unité arbitraire, la valeur du demi-axe a sera aussi exprimée en même unité. En calculant avec a ainsi obtenu les valeurs de ρ correspondantes aux temps connus, et en les comparant avec les ρ observés, on obtiendra la grandeur de l'unité arbitraire, et par suite la vraie valeur de a.

L'auteur applique ce procédé au calcul des éléments de l'orbite de l'étoile du ξ Bouvier, en prenant pour base les observations faites par Herschel, O. Struve, Dembowski.

Voici le tableau de ces éléments ainsi que de leurs valeurs calculées par Herschel :

	Vinogradsky.	Herschel.
Demi-grand axe.............	$a = 5'',425$	$12'',56$
Excentricité................	$e = 0,64099$	$0,59374$
Inclinaison..................	$i = 48^\circ 25',5$	$80^\circ 5'$
Longitude du nœud..........	$\Omega = 11^\circ 35',6$	$359^\circ 59'$
Position du périastre par rapport à l'origine.............	$\varpi = 147^\circ 14',0$	$138^\circ 24'$
Longitude du périastre comptée à partir du nœud sur l'orbite réelle.....................	$\lambda = 124^\circ 9'4$	$100^\circ 59'$
Époque du passage au périastre.....................	$T = 1767^{ans},76$	$1779,96$
Mouvement moyen...........	$n = -2^\circ,5597$	$-3^\circ,0733$
Durée de révolution.........	$\tau = 140^{ans},64$	$117^{ans},14$

Dans une brève analyse du précédent Mémoire, M. Kowalski, professeur à l'Université de Kazan, fait à propos de la méthode

de Herschel plusieurs remarques importantes, que nous jugeons utile de reproduire.

Dans la plupart des cas, les distances ρ sont excessivement petites et les erreurs de leur observation sont très-comparables avec leur grandeur : souvent même il est impossible de les mesurer directement, et l'on se borne à les calculer d'après les valeurs des θ. On pourrait donc introduire directement dans le calcul les éléments θ et t, pouvant être observés avec beaucoup plus d'exactitude, quoique dans ce cas les résolutions d'équations du second degré fussent remplacées par celles d'équations transcendantes.

Dans la méthode de Herschel, après avoir évalué les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ et l'équation générale de la projection (1), on détermine en premier lieu les éléments de cette projection. Or l'équation (1) peut servir à la détermination directe de l'orbite réelle. En effet, si les coefficients $\alpha, \beta, \ldots$ sont suffisants pour déterminer les constantes de l'équation

$$(2) \qquad z = mx + ny$$

du plan de l'ellipse réelle, ces constantes doivent être fonctions de ces coefficients. En outre, une des conditions du problème est que l'origine des coordonnées x, y coïncide avec le foyer de l'ellipse située dans le plan (2) ; donc, en introduisant immédiatement cette condition dans l'équation (1), on pourra en déduire les éléments et la position de l'ellipse réelle.

En désignant par p le paramètre, par λ l'angle du grand axe et de l'intersection du plan (2) avec celui des xy, par ω l'angle de cette intersection avec l'axe des x, l'équation générale de l'ellipse

$$p = r + er\cos v$$

se transforme, en projetant r et ρ sur la ligne des nœuds, en

$$p = e\rho[\sin(\theta-\omega)\sin\lambda\,\text{séc}\,i + \cos(\theta-\omega)\cos\lambda] + \rho\sqrt{1+\tan^2 i\sin^2(\theta-\omega)}.$$

En y introduisant $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, on aura une équation du second degré en x et y, et, en comparant ses coefficients de cette nouvelle équation avec ceux de l'équation (1), on obtiendra les

cinq relations :

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\text{tang}^2 i}{p^2}\sin 2\omega = \delta - \dfrac{1}{2}\alpha\beta, \\ \dfrac{\text{tang}^2 i}{p^2}\cos 2\omega = (\gamma-\varepsilon) - \dfrac{1}{4}(\alpha^2-\beta^2), \\ \dfrac{2}{p^2} + \dfrac{\text{tang}^2 i}{p^2} = -(\gamma+\varepsilon) + \dfrac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2), \\ e\sin\lambda = -\dfrac{p}{2}(\beta\cos\omega - \alpha\sin\omega)\cos i, \\ e\cos\lambda = -\dfrac{p}{2}(\beta\sin\omega + \alpha\cos\omega), \end{cases}$$

qui expriment les éléments de l'orbite réelle, p, e, ω, i et λ, en fonction des coefficients α, β, γ, δ et ε.

Le calcul des coefficients α, β, ... est assez difficile, même dans le cas où le nombre d'équations serait réduit à cinq, tandis que la méthode des moindres carrés, appliquée au calcul des coefficients des séries périodiques, est assez facile. Pour obtenir une pareille série, supposons que les observations de θ et ρ sont faites à des intervalles égaux α, assez petits pour que $\frac{360}{\alpha} > 5$ et qu'elles embrassent un arc de $360° - \alpha$. Dans ce cas, en développant le radical de l'équation (3) suivant les cosinus des multiples de $\theta - \omega$, on peut introduire cinq nouvelles inconnues auxiliaires, exprimées en séries périodiques, et qui permettent de déterminer les éléments cherchés.

On peut observer, à propos de cette dernière remarque, que ce procédé, tout en rendant le calcul facile, n'est applicable que dans le cas où l'on possède des observations le long de l'orbite presque entière, ce qui n'est pas le cas général.

Vinogradsky (N.-V.) — *Détermination de l'orbite du compagnon de l'étoile μ^2 du Bouvier.* (15 p.)

Application des formules (4) données par M. Kowalski au calcul de l'orbite du compagnon de μ^2 du Bouvier, si ce n'est que les coefficients α, β, γ, ... ont été déterminés à l'aide d'équations de la forme (1) par la méthode des moindres carrés.

Voici les résultats obtenus par l'auteur, comparés avec les résultats trouvés par Wilson :

	Vinogradsky.	Wilson.
Longitude du nœud comptée à partir de l'axe des x....	$\Omega = 166°8'$	$172°,0$
Inclinaison..............	$i = 47°31'$	$45°$
Longitude du périastre comptée à partir du nœud sur l'orbite réelle...........	$\lambda = 23°1'$	$20°5'$
Excentricité.............	$e = 0,491$	$0,51$
Position du périastre à partir de l'axe des x...........	$\varpi = 182°8'$	$186°30'$
Mouvement moyen.........	$n = -1°,972$	$-1°,7$
Époque de passage au périastre....................	$T = 1866^{ans},00$	$1965^{ans},2$
Durée de la révolution.....	$\tau = 182^{ans},6$	$200,4$
Demi-grand axe............	$a = 1'',165$	»

Vassilief (A.). — *De la détermination du nombre de racines des équations simultanées.* (26 p.)

En considérant les fonctions de n variables comme représentant les points d'un système de n dimensions, le nombre des racines sera le nombre des points d'intersection de n systèmes de $n-1$ dimensions, et sa recherche sera amenée à celle de la caractéristique d'un système de $n-1$ fonctions. A. P.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. Gerono et Ch. Brisse.

T. XV (2e série); 1876 (¹).

Lucas (É.). — *Problèmes sur l'ellipse.* (3 p.)

Sur la construction géométrique des normales à une conique. — Sur la corde normale maximum. — Sur le triangle inscrit et concentrique à l'ellipse. — *Voir* aussi *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VII, p. 523, et t. IX, p. 348; et Salmon, *Traité des sections coniques* (*traduction française*). (p. 306.)

(¹) Voir *Bulletin*, t. X, p. 32.

Lucas (É.). — *De la trisection de l'angle à l'aide du compas sphérique.* (2 p.)

Interprétation d'un passage d'une lettre de Descartes. — *Voir* aussi *Nouvelles Annales,* 2ᵉ série, t. III, p. 222.

Laguerre. — *Sur les lignes géodésiques des surfaces du second ordre.* (2 p.)

Extension à l'espace d'un théorème de Maclaurin relatif à l'ellipse.

Worontzoff. — *Sur les nombres de Bernoulli.* (7 p.)

Cet article contient plusieurs formules renfermant les nombres de Bernoulli, et des applications de ces formules à diverses sommations.

Lucas (É.). — *Théorèmes nouveaux sur la parabole et l'hyperbole.* (2 p.)

L'auteur démontre ou énonce, dans cette étude, vingt-et-un théorèmes relatifs aux aires des triangles et des polygones inscrits à la parabole et à l'hyperbole. — *Voir,* du même auteur, *Nouveaux théorèmes de Géométrie supérieure* (*Bulletin de la Société d'émulation de l'Allier,* 1875).

Rouché (E.). — *Extrait d'une Lettre.*

Réclamation de priorité au sujet d'un article de M. Fontené sur la discussion des équations du premier degré. (*Voir,* pour l'analyse de cet article, *Bulletin,* t. X, p. 35.)

Laguerre. — *Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différences partielles du second ordre.* (9 p.)

M. Laguerre s'est proposé, dans cet article, de présenter, sous une forme plus nette et plus brève qu'on ne le fait habituellement, la méthode de Monge qui a été élucidée par les travaux d'Ampère, de Boole et de Bour. (*Voir,* du même auteur, un Mémoire *Sur le calcul des systèmes linéaires,* inséré dans le *Journal de l'École Polytechnique,* XLIIᵉ Cahier.)

Lucas (F.). — *Démonstration nouvelle du théorème de Coriolis.* (3 p.)

Il s'agit d'un théorème sur l'accélération apparente dans un mouvement relatif. La démonstration de M. F. Lucas, surtout géomé-

trique, s'appuie sûr la considération de mobiles fictifs qui obéiraient seulement au mouvement d'entraînement.

ESCARY. — *Remarque sur la Note de M. Floquet, relative à l'intégration de l'équation d'Euler.* (3 p.)

Voir, pour la Note de M. Floquet : *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 120; et, pour l'analyse de cette Note, *Bulletin*, t. IX, p. 174.

LUCAS (É.) — *Question nouvelle d'Arithmétique supérieure.* (2 p.)

Énoncés de neuf questions d'arithmologie.

MOREAU (C.). — *Extrait d'une lettre.*

Sur les permutations : indication de résultats obtenus depuis plusieurs années, et confirmant ceux de M. Vachette.

LUCAS (É.). — *Extrait d'une lettre.*

M. É. Lucas fait ressortir qu'en réalité l'idée de la Cinématique appartient, non pas à Ampère ou à Wronski, mais bien à Carnot, comme le prouvent deux citations extraites de la *Géométrie de position.*

HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — *Note sur les courbes que représente l'équation* $\rho^n = A \sin n\omega$. (11 p.)

L'auteur expose un résumé des propriétés fort remarquables de ces courbes, qui ont été étudiées par Maclaurin, Euler, l'Hospital, Fagnano, Riccati, Lamé, Serret, Ossian Bonnet, W. Roberts, etc. Il a eu soin, pour la plupart de ces propriétés, d'indiquer les sources où l'on pourrait retrouver les démonstrations.

TERRIER (P.) — *Quadrilatères et sections coniques.* (6 p.)

M. Terrier énonce onze nouveaux théorèmes relatifs aux quadrilatères. Cet article fait suite à un précédent, publié dans les *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 514. *Voir* aussi *Bulletin*, t. X, p. 35.

VACHETTE. — *Permutations rectilignes de* $3q$ *lettres égales trois à trois, quand trois lettres consécutives sont distinctes; calcul de la formule générale; application.* (12 p.)

Suite d'articles publiés précédemment. *Voir* notamment *Bulletin*, t. X, p. 32 et 34.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Note sur les courbes planes d'ordre n à point multiple d'ordre n — 1*. (2 p.)

Cette Note est relative au mode de génération des courbes dont il s'agit; on y trouve l'expression du rayon vecteur issu du point multiple. *Voir*, sur ce sujet, les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, séance du 26 avril 1875.

NIEWENGLOWSKI (B.). — *Sur un théorème de Jacques Bernoulli*. (1 p.)

L'énoncé de ce théorème, relatif au cône oblique, est le suivant, extrait de l'*Aperçu historique* :

« Que l'on mène un plan parallèle à la base du cône, et situé à la même distance de son sommet que le plan de la section conique proposée; ce plan coupera le cône suivant un cercle dont le diamètre sera le *latus rectum* $\frac{2b^2}{a}$ de la conique. »

DEVIN. — *Correspondance*. (1 p.)

Sur cette propriété, que, si deux bissectrices des angles d'un triangle sont égales, le triangle est isoscèle.

VACHETTE. — *Permutations rectilignes de 3q lettres égales trois à trois, quand trois lettres consécutives sont distinctes; calcul de la formule générale; application*. (2ᵉ art., 22 p.)

Ces articles terminent la série de ceux dont nous avons eu précédemment l'occasion de rendre compte. (*Voir* notamment *Bulletin*, t. X, p. 32.) Les observations que nous avons formulées alors subsistent en entier. Les résultats obtenus ne semblent pas en proportion des efforts faits pour les obtenir et de la difficulté des notations. Dans tous les cas, un semblable travail aurait mieux trouvé sa place dans tout autre recueil mathématique, plutôt que dans les *Nouvelles Annales*, qui, par destination, s'adressent spécialement aux élèves et aux professeurs.

ROUQUET. — *Note sur la continuité des racines des équations algébriques*. (4 p.)

Démonstration de deux théorèmes intéressants sur les variations des coefficients et des racines d'une équation algébrique.

GAMBEY. — *Note sur le rayon de courbure des sections coniques*. (1 p.)

On peut comparer cette Note avec la méthode de M. Bellavitis

(*Exposition de la méthode des équipollences*, p. 147) sur le même sujet.

Lucas (É.). — *Sur la relation de Möbius, qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle.* (2 p.)

Théorème plus général que celui de Möbius, et donnant la condition pour que quatre cercles soient orthogonaux à un même cercle. *Voir*, pour la relation de Möbius, *Journal de Crelle*, t. XVI, p. 26.

Lucas (É.) — *Sur un problème de Halley relatif à la théorie des sections coniques.* (3 p.)

Ce problème, posé par Halley sous forme astronomique, revient à la construction d'une conique, connaissant un foyer et trois points. La méthode indiquée par M. Lucas est d'une simplicité et d'une originalité remarquables; elle a pour objet de ramener la solution à celle d'un problème très-élémentaire de Géométrie descriptive. Nous croyons la méthode de M. Lucas absolument nouvelle.

Milewski (N.). — *Extrait d'une lettre.*

Énoncés de deux théorèmes très-simples, et qui paraissent nouveaux, sur le triangle rectangle. Ces théorèmes sont dus à M. E. Karatchinsky.

Parmentier (Th.). — *Simplification de la méthode d'interpolation de Thomas Simpson.* (10 p.)

La formule de quadrature du général Parmentier

$$S_3 = h\left(2\Sigma y_i + \frac{y_0 + y_{2n}}{6} - \frac{y_1 + y_{2n-1}}{6}\right)$$

n'est pas nouvelle. Il l'a publiée depuis longtemps (Voir *Mémorial de l'Officier du Génie*, n° 16, 1854, p. 290, et *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1re série, t. XIV, 1855, p. 370); mais la manière dont l'auteur présente actuellement cette formule permet de la comparer directement à celle de Simpson. Pour apprécier la valeur pratique de cette formule, ce qui est surtout intéressant en pareille matière, deux tableaux renfermant un certain nombre d'exemples numériques ont été dressés et sont suivis d'une discussion sur les résultats qu'ils contiennent. La formule de M. Parmentier semble offrir, en général, de grands avantages, et réunir, comme il le dit, l'exactitude de celle de Simpson à la simplicité de

celle de Poncelet. Toutefois, nous croyons qu'il ne faut pas être absolu, et que la meilleure formule à appliquer dans chaque cas particulier dépend des conditions spéciales du problème, et du degré d'exactitude dont on a besoin.

Le général Piobert a découvert la même formule. L'article se termine par une Note qui établit d'une façon péremptoire la priorité du général Parmentier.

FAURE. — *Théorie des indices.* (13 p.)

Le nom du commandant Faure est bien connu des lecteurs des *Nouvelles Annales*, et ils ont pu constater quel usage habile des indices il a su faire dans de nombreux problèmes. Il a, dans le même recueil, publié une théorie géométrique des indices, dans laquelle il considérait l'indice d'un point, d'une droite, d'un plan. Cette nouvelle étude est consacrée aux indices d'un système de deux points, de deux droites ou de deux plans. Le présent article devant avoir une suite, il nous semble préférable de l'attendre, avant d'en présenter une analyse.

BOURGUET. — *Extrait d'une lettre.*

Enoncés de neuf formules concernant les tangentes, les normales, les rayons vecteurs et les rayons de courbure des coniques.

A. L.

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES ABSOLUMENT INTÉGRABLES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES, ET SUR L'INTÉGRATION SIMULTANÉE DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES (¹);

PAR M. A. MAYER, à Leipzig.

(Suite et fin.)

§ III.

Réduction du système absolument intégrable (1) à un système unique de $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre.

La méthode exposée dans le paragraphe précédent ramène l'intégration du système absolument intégrable (1) à l'inté-

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 86.

gration de $m-1$ systèmes, chacun de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires. Mais, si l'on avait affaire au cas particulier où l'on pourrait choisir x_1^0 de telle sorte que, pour $x_1 = x_1^0$, les $(m-2)(n-m+1)$ quantités $a_k^2, a_k^3, \ldots, a_k^{m-1}$ devinssent toutes nulles, les équations (13), auxquelles se ramène le système donné (1) par l'intégration des équations (7), se réduiraient à

$$dx_k^0 = 0,$$

et donneraient par suite immédiatement

$$x_m^0 = \text{const.}, \quad x_{m+1}^0 = \text{const.}, \quad \ldots, \quad x_n^0 = \text{const.}$$

Alors donc les solutions complètes du premier de ces $n-m+1$ systèmes d'équations différentielles ordinaires, exprimées au moyen de x_1 et des valeurs initiales de $x_m, \ldots, x_n$ pour $x_1 = x_1^0$, nous donneraient immédiatement les solutions complètes du système (1), dès que l'on y considérerait ces valeurs initiales comme des constantes arbitraires, indépendantes de $x_2, \ldots, x_{m-1}$.

Ce cas, en apparence très-particulier, peut toujours être amené par une transformation convenable des équations (1).

Prenons comme nouvelles variables, à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, $m-1$ autres quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, définies par $m-1$ équations arbitraires et indépendantes les unes des autres

$$(14) \qquad x_h = x_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1});$$

les équations (1) se transformeront dans les suivantes :

$$(15) \qquad dx_k = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_k^i \, d\alpha_i,$$

où

$$(16) \qquad b_k^i = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}.$$

On obtient en même temps, en faisant les substitutions (14) dans une fonction quelconque f de $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_i} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \frac{\partial f}{\partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i};$$

par suite,

$$(17)\qquad \frac{\partial f}{\partial \alpha_i} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^i \frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_{h=1}^{h=m-1} \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} a_k^h \frac{\partial f}{\partial x_k}\right).$$

Comme nous savons, par ce qui précède, que le système primitif (1) est un système complétement intégrable dès que les identités (3) sont satisfaites, il en résulte immédiatement que, dans cette hypothèse, le système transformé (15) jouira aussi de la même propriété, et, par conséquent, on doit avoir identiquement entre les coefficients b_k^i de ce système les relations

$$(18)\qquad \frac{\partial b_k^\rho}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\rho} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(b_\lambda^\rho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\rho}{\partial x_\lambda}\right) = 0,$$

dans lesquelles $k = m, m+1, \ldots, n$, ρ et σ étant deux quelconques des nombres $1, 2, \ldots, m-1$, et qui, si nous posons en général

$$(19)\qquad \mathrm{B}_\rho(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_\rho} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^\rho \frac{\partial f}{\partial x_\lambda},$$

entraîneront les suivantes :

$$(20)\qquad \mathrm{B}_\rho[\mathrm{B}_\sigma(f)] = \mathrm{B}_\sigma[\mathrm{B}_\rho(f)].$$

Cela peut être d'ailleurs facilement vérifié par le calcul.

On a, en effet, d'après les équations (16),

$$\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\rho} - \frac{\partial b_k^\rho}{\partial \alpha_\sigma} = \sum_{h=1}^{h=m-1}\left(\frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma} - \frac{\partial a_k^h}{\partial \alpha_\sigma}\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\rho}\right)$$
$$= \sum_{h=1}^{h=m-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu}\left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\rho} - \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma}\right),$$

et

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(b_\lambda^\rho \frac{\partial b_k^\sigma}{\partial \alpha_\rho} - b_\lambda^\sigma \frac{\partial b_k^\rho}{\partial \alpha_\sigma}\right) = \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} a_\lambda^\mu \left(\frac{\partial b_k^\sigma}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\rho} - \frac{\partial b_k^\rho}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma}\right)$$
$$= \sum_{h=1}^{h=m-1}\sum_{\mu=1}^{\mu=m-1}\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\rho} - \frac{\partial x_h}{\partial \alpha_\rho}\frac{\partial x_\mu}{\partial \alpha_\sigma}\right).$$

Si l'on forme avec ces valeurs le premier membre de l'équation (18), et qu'on échange entre eux, dans les termes négatifs, les deux indices de sommation h et μ, il viendra

$$\frac{\partial b_k^\nu}{\partial x_\rho} - \frac{\partial b_k^\rho}{\partial x_\nu} - \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(b_\lambda^\rho \frac{\partial b_k^\nu}{\partial x_\lambda} - b_\lambda^\nu \frac{\partial b_k^\rho}{\partial x_\lambda}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{h=m-1} \sum_{\mu=1}^{\mu=m-1} \frac{\partial x_h}{\partial x_\nu}\frac{\partial x_\mu}{\partial x_\rho}\left[\frac{\partial a_k^h}{\partial x_\mu} - \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(a_\lambda^\mu \frac{\partial a_k^h}{\partial x_\lambda} - a_\lambda^h \frac{\partial a_k^\mu}{\partial x_\lambda}\right)\right],$$

formule qui démontre directement que, des deux systèmes de relations identiques (3) et (18), l'un entraine toujours l'autre comme conséquence.

On peut ainsi employer pour l'intégration du système (15), déduit du système complétement intégrable (1) par les substitutions (14), exactement la même méthode que nous avons obtenue dans le paragraphe précédent pour l'intégration de (1).

D'après cette méthode, nous commencerons par intégrer complétement les $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires

$$(21) \qquad \frac{dx_m}{dx_1} = b_m^1, \quad \frac{dx_{m+1}}{dx_1} = b_{m+1}^1, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dx_1} = b_n^1,$$

et nous exprimerons les constantes d'intégration au moyen des valeurs $x'_m, \ldots, x'_n$ des variables $x_m, \ldots, x_n$ correspondantes à la valeur initiale constante x'_1 de x_1. Les solutions complètes ainsi obtenues des équations (21) nous donnent aussi en même temps les solutions complètes du système (15), si nous remplaçons dans ces équations $x'_m, \ldots, x'_n$ par les fonctions de $x_2, \ldots, x_{m-1}$, qui résultent de l'intégration complète du système

$$(22) \qquad dx'_i = \sum_{\nu=2}^{\nu=m-1} b_i^{\nu\prime}\, dx_\nu,$$

dont les coefficients $b_i^{\nu\prime}$ se déduisent des coefficients

$$b_i^\nu = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_i^h \frac{\partial x_h}{\partial x_\nu}$$

de l'équation (16), en y faisant $x_1 = x'_1, x_m = x'_m, \ldots, x_n = x'_n$.

Or maintenant le choix des substitutions (14) reste complétement arbitraire, et l'on voit aisément que nous pourrons toujours en disposer de telle sorte que tous les coefficients b_k^{i0} des équations (22) s'évanouissent. Nous n'avons, en effet, pour cela qu'à prendre les substitutions (14) de la forme

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0) f_h,$$

α_1^0 et x_h^0 étant des constantes, et $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$, au contraire, $m-1$ fonctions arbitraires de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, qui devront seulement, bien entendu, être choisies toujours de telle manière que les équations (23) soient indépendantes entre elles par rapport à $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$.

On aura ainsi

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left[f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right],$$

et pour $i > 1$

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_i}.$$

Si donc nous attribuons à α_1^0 une valeur constante quelconque, telle qu'aucune des $m-1$ fonctions f_h ne soit infinie ou indéterminée pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, et si nous choisissons en outre les constantes $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0$ de telle sorte que, pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$, $x_{m-1} = x_{m-1}^0$, les quantités a_k^h restent finies et déterminées, alors, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, chacun des b_k^i dont l'indice $i > 1$ s'annulera, tandis que les quantités b_k^1 conserveront, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, des valeurs finies et déterminées.

Pour ce choix des substitutions (14), les solutions complètes des $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires (21), exprimées au moyen de α_1 et des valeurs initiales de $x_m, \ldots, x_n$ pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, si l'on y considère ces valeurs initiales comme des constantes arbitraires, indépendantes de $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{m-1}$, seront également les solutions du système d'équations différentielles totales (15). De ces dernières on déduira les solutions du système donné (1), en y remplaçant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ par les valeurs résultant des substitutions (23).

L'intégration du système donné de $n - m$ équations linéaires

aux différentielles totales

(1) $$dx_i = \sum_{i=1}^{i=m-1} a_i^k\, dx_k \qquad (k = m, m+1, \ldots, n),$$

dans l'hypothèse où l'on a entre ses coefficients les relations identiques suivantes :

$$\frac{\partial a_i^k}{\partial x_h} - \frac{\partial a_h^k}{\partial x_i} - \sum_{i=m}^{i=n} \left(a_i \frac{\partial a_h^k}{\partial x_i} - a_h^i \frac{\partial a_i^k}{\partial x_i}\right) = 0,$$

peut être ainsi ramenée à l'intégration d'un système unique de $n - m - 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, en opérant comme il suit :

Introduisons à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, par les substitutions

(23) $$x_i = x_i^0 + (z_1 - z_1^0) f_i,$$

choisies arbitrairement, sous les restrictions indiquées plus haut, les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ comme nouvelles variables indépendantes. Le système (1) se changera ainsi dans le suivant :

(15) $$dx_i = \sum_{i=1}^{i=m-1} b_i^k\, dz_i,$$

des coefficients duquel

(24) $$\begin{cases} b_1^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=m-1} a_i^k \left[f_i + (z_1 - z_1^0) \frac{\partial f_i}{\partial z_1}\right], \\ b_i^k = (z_1 - z_1^0) \displaystyle\sum_{k=1}^{k=m-1} a_k^i \frac{\partial f_k}{\partial z_i}, \quad i > 1, \end{cases}$$

il faudra éliminer $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ par les substitutions (23). *Si alors on a complètement intégré les $n - m + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, déduites de* (15),

(16) $$\frac{\partial x_m}{\partial z_1} = b_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial z_1} = b_{m+1}^1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial z_1} = b_n^1,$$

où l'on a exprimé les constantes d'intégration au moyen de

valeurs initiales $x_m^0, \ldots, x_n^0$ *pour* $\alpha_1 = \alpha_1^0$, *les équations ainsi obtenues entre*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \quad x_m, \ldots, x_n$$

et les constantes arbitraires

$$x_m^0, \ldots, x_n^0,$$

seront les équations intégrales complètes tant des équations différentielles ordinaires (25) *que des équations aux différentielles totales* (15), *et il ne reste plus, par suite, qu'à éliminer de ces équations les quantités* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, *à l'aide des formules* (23), *pour obtenir les équations intégrales complètes du système donné* (1).

La manière la plus simple de satisfaire aux conditions exigées pour les substitutions (23) est de poser

$$x_1 = \alpha_1,$$

et, pour $h = 2, 3, \ldots, m-1$,

$$x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_h,$$

où l'on doit seulement choisir les constantes $\alpha_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0$ de telle sorte que, pour

$$x_1 = \alpha_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \ldots, \quad x_{m-1} = x_{m-1}^0,$$

aucune des quantités α_k^h ne devienne infinie ou indéterminée. On obtient ainsi

$$b_k^1 = a_k^1 + \alpha_2 a_k^2 + \ldots + \alpha_{m-1} a_k^{m-1},$$
$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_k^i, \quad i > 1.$$

Dans la démonstration du théorème précédent, on n'a pas fait usage de l'équivalence des systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales avec les systèmes jacobiens d'équations linéaires aux différentielles partielles, pour le but déterminé de tirer l'intégration de ceux-ci de l'étude des premiers. Mais, si l'on veut s'aider des propriétés connues des systèmes jacobiens, on peut encore se convaincre, par une autre voie plus courte et sans aucun calcul, de la possibilité de ramener le système absolument intégrable (1) au système d'équations différentielles ordinaires (25). Pour ne pas interrompre l'ordre de ces recherches, je renvoie à la fin de ce Mémoire (§ VII) cette seconde démon-

stration du théorème précédent, qui se rattache d'une manière encore plus intime que la précédente au raisonnement par lequel M. P. du Bois-Reymond a démontré cette réductibilité pour le cas spécial d'une seule équation linéaire aux différentielles totales.

§ IV.

Intégration du système jacobien $A_k(f) = 0$.

En vertu du paragraphe précédent, les intégrales complètes des équations différentielles ordinaires (25), exprimées en fonction de α_1 et des valeurs initiales constantes de $x_m, \ldots, x_n$ pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, sont aussi les équations intégrales complètes du système d'équations aux différentielles totales (15) qui se déduit du système donné (1) par les substitutions (23).

Mais les intégrales complètes d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre jouissent de la propriété d'être résolubles à la fois par rapport, soit aux variables dépendantes, soit aux valeurs initiales de ces variables. On peut utiliser, d'après cela, les équations intégrales complètes du système (25), pour en tirer d'abord $x_m, \ldots, x_n$, et ensuite $x_m^0, \ldots, x_n^0$. Soient

$$(26) \qquad x_k = \psi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0)$$

et

$$(27) \qquad x_k^0 = \chi_k(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n)$$

les valeurs ainsi obtenues pour x_k et x_k^0.

Les équations (27) doivent être identiquement satisfaites par les substitutions (26), et, par conséquent, les expressions

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial \chi_k}{\partial x_\lambda} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_h}$$

doivent être identiquement nulles. Mais comme, d'après ce qui précède, ces substitutions satisfont également au système (15), c'est-à-dire aux équations

$$\frac{\partial\chi_h}{\partial\alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial\chi_k}{\partial x_\lambda}$$

...nnuler, comme cela résulte d'ailleurs directe... ...ue les expressions $B_h(\chi_k)$ doivent devenir, par ...(6), indépendantes de α_1, puisque, d'après nos ... $B_1(\chi_k) = 0$, et par suite, en vertu de l'identité

$$B_1[B_k(f)] = B_k[B_1(f)],$$

...ssi immédiatement

$$B_1[B_k(\chi_k)] = 0;$$

...s ces expressions s'annulent quand on pose $\alpha_1 = \alpha_1^0$, puis... alors χ_k doit se réduire à x_k, et que, de plus, chaque $b_k^h = 0$ ...r $h > 1$.

...r le résultat nul de la substitution des valeurs (26) dans les ...ressions $B_h(\chi_k)$ ne peut pas être changé si, à la place des x_k^0, on ...et leurs valeurs (27), ce qui détruit l'effet de la substitu...n (26). Donc, avant cette substitution, on doit avoir déjà iden...uement

$$B_k(\chi_k) = 0,$$

...st-à-dire que

$$f = \chi_m,\ \chi_{m+1},\ \ldots,\ \chi_n$$

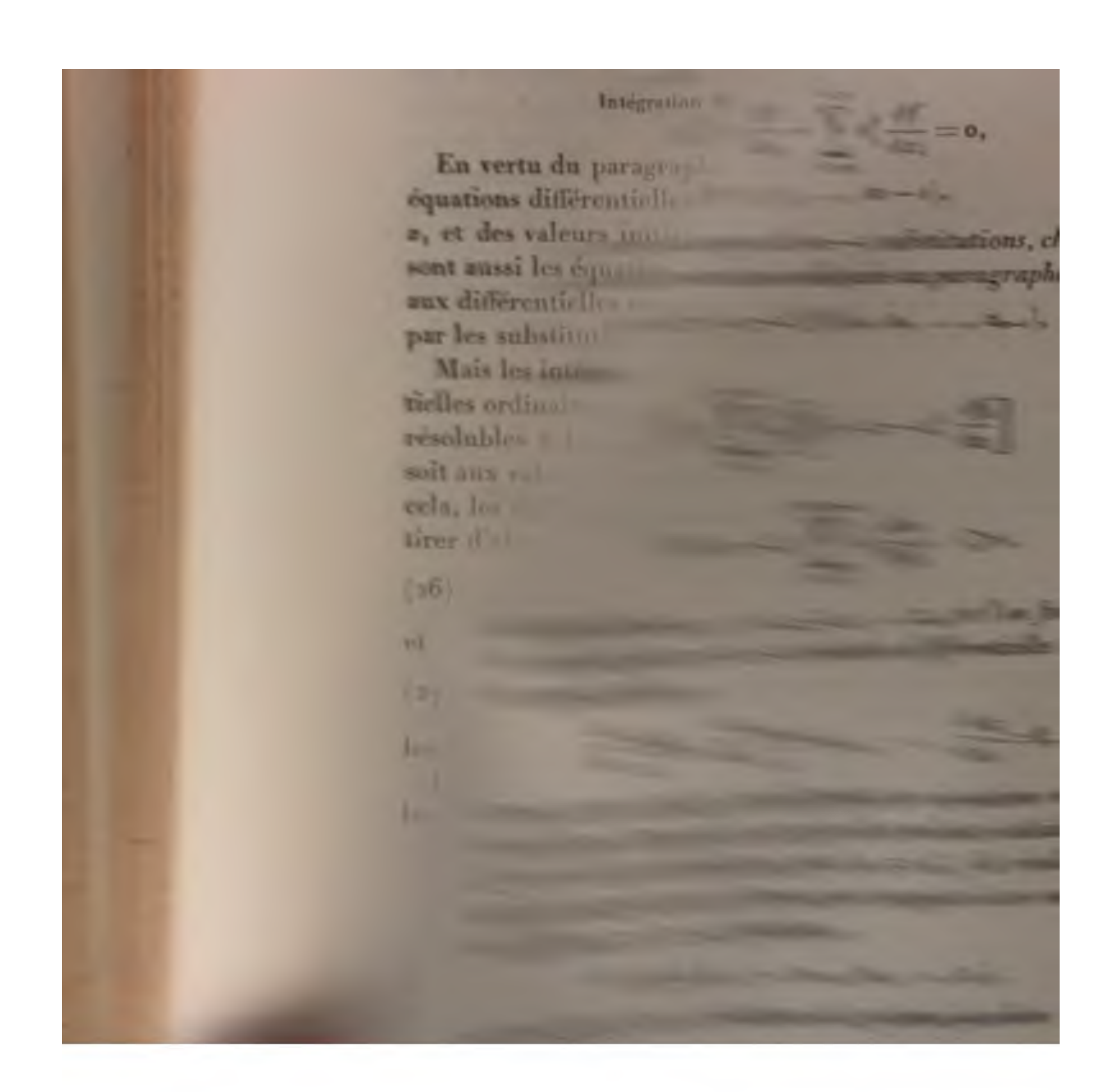
...t les solutions du système jacobien de $m - 1$ équations linéaires ...x différentielles partielles

$$B_k(f) = \frac{\partial f}{\partial\alpha_k} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^k \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0.$$

...is le système jacobien provient, comme le montre la for...le (17), du système

$$A_k(f) = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^k \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0,$$

...sque, par les substitutions (23), on introduit comme variables ... $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, et il est clair que ...substitution inverse devra réciproquement transformer le sys...me jacobien dans le système (17). Les solutions $f = \chi_m, \chi_{m+1}, \ldots,$



Intégration

En vertu du paragra
équations différentielle
z, et des valeurs
sont aussi les équ
aux différentielles
par les substitu
Mais les int
tielles ordinai
résolubles
soit aux
cela, les
tirer d'

(26)

et

… x_{m-1}, *à l'aide des équa-*
…*tions du système jacobien*

§ V.

…tème jacobien donné (28), il suffit de connaître
…des équations différentielles ordinaires (25).

…me précédent, la détermination de *toutes* les
…stème jacobien de la forme (28) se ramène à l'in-
…*plète* d'un seul système de $n-m+1$ équations
…les ordinaires du premier ordre. Mais, dans la plupart
…ations des systèmes de Jacobi et dans les plus impor-
…exemple dans l'intégration des équations aux différen-
…ielles du premier ordre et dans le problème de Pfaff, il
…ullement d'obtenir la solution générale des systèmes ja-
…e l'on rencontre, mais il suffit toujours de trouver une
…tion de chacun d'eux. Dès lors il est de la plus grande
…e de rechercher si l'on ne pourrait pas trouver, sans avoir
…tégrer complétement le système (25), une solution du
…cobien (28) ou (29).
…ns que l'on ait une intégrale quelconque

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

…ons (25). Les solutions complètes de ces équations diffé-
…exprimées au moyen de α_1 et des valeurs initiales de
…pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, satisfont alors à l'équation

$$\ldots\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) - F(\alpha_1^0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

…s le § III, ces solutions, quand on y considère $x_m^0, \ldots, x_n^0$
…lépendants de $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, satisfont aussi aux équations
…entielles totales (15) ou aux équations

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_h} = b_k^h.$$

…ent, par conséquent, aussi satisfaire identiquement aux

$$B_h(U) = \frac{\partial U}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0,$$

χ_n du premier système, dès que nous y mettons pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ les valeurs résultant des substitutions (23), donnent donc aussi en même temps les solutions du second système jacobien, équivalent au système donné (1).

De là résulte la méthode suivante pour l'intégration complète du système jacobien donné des $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles

$$(28) \qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0,$$

$$(h = 1, 2, \ldots, m-1).$$

On exprimera, au moyen de $m-1$ *substitutions, choisies arbitrairement sous les restrictions indiquées au paragraphe précédent,*

$$(23) \qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0) f_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}),$$

les quantités

$$b_k^1 = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \left[f_h + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{\partial f_h}{\partial \alpha_1} \right]$$

et

$$b_k^i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{h=1}^{h=m-1} a_k^h \frac{\partial \alpha_i}{\partial f_h}, \quad i > 1,$$

au moyen de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n$, *et l'on formera avec les premières les* $n-m+1$ *équations différentielles ordinaires du premier ordre*

$$\frac{\partial x_m}{\partial \alpha_1} = b_m^1, \quad \frac{\partial x_{m+1}}{\partial \alpha_1} = b_{m+1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1} = b_n^1.$$

Lorsqu'on aura intégré complétement ces équations et exprimé les constantes d'intégration au moyen des valeurs initiales $x_m^0, \ldots, x_n^0$ *des variables dépendantes pour* $\alpha_1 = \alpha_1^0$, *la résolution des équations intégrales ainsi obtenues par rapport à ces valeurs initiales donnera* $n-m+1$ *fonctions*

$$x_k^0 = \chi_k(\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n),$$

qui seront les $n-m+1$ *solutions du système jacobien*

$$(29) \qquad B_h(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} b_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0,$$

et qui, par l'élimination de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, à l'aide des équations (23), *nous donneront les solutions du système jacobien donné* (28).

§ V.

Pour trouver une solution du système jacobien donné (28), il suffit de connaître une intégrale quelconque des équations différentielles ordinaires (25).

D'après le théorème précédent, la détermination de *toutes* les solutions d'un système jacobien de la forme (28) se ramène à l'intégration *complète* d'un seul système de $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. Mais, dans la plupart des applications des systèmes de Jacobi et dans les plus importantes, par exemple dans l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre et dans le problème de Pfaff, il ne s'agit nullement d'obtenir la solution générale des systèmes jacobiens que l'on rencontre, mais il suffit toujours de trouver une seule solution de chacun d'eux. Dès lors il est de la plus grande importance de rechercher si l'on ne pourrait pas trouver, sans avoir besoin d'intégrer complétement le système (25), une solution du système jacobien (28) ou (29).

Supposons que l'on ait une intégrale quelconque

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) = \text{const.}$$

des équations (25). Les solutions complètes de ces équations différentielles, exprimées au moyen de α_1 et des valeurs initiales de $x_m, \ldots, x_n$ pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, satisfont alors à l'équation

$$(30)\quad U = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n) - F(\alpha_1^0, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m^0, \ldots, x_n^0) = 0.$$

Or, d'après le § III, ces solutions, quand on y considère $x_m^0, \ldots, x_n^0$ comme indépendants de $\alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, satisfont aussi aux équations aux différentielles totales (15) ou aux équations

$$(31)\qquad \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_h} = b_k^h.$$

Elles doivent, par conséquent, aussi satisfaire identiquement aux équations

$$(32)\qquad B_h(U) = \frac{\partial U}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0,$$

que l'on obtient par la différentiation de l'équation $U = 0$ par rapport à α_h, en ayant égard aux relations (31) ([1]). La forme de l'équation $U = 0$ est ici entièrement arbitraire. Il en est absolument de même pour toute équation $V = 0$, déduite de l'équation (30) par des opérations algébriques quelconques.

Des $m - 1$ équations (32), la première est toujours identique, ou, dans le cas où cette équation n'a pas été formée directement avec l'équation (30), mais avec une autre équation quelconque équivalente à (30), elle est du moins une simple conséquence algébrique de l'équation $U = 0$. Quelquefois aussi une partie des autres équations peut être identique ou être une conséquence de l'équation $U = 0$. Mais toutes celles des équations (32) qui ne possèdent pas cette propriété sont de nouvelles intégrales du système (25). Avec chacune de ces nouvelles intégrales on pourra maintenant procéder tout comme avec l'équation $U = 0$, et l'on reconnaît ainsi la possibilité de déduire d'une seule intégrale des équations différentielles ordinaires (25), par la simple différentiation, toute une série de nouvelles équations intégrales, qui appartiennent toutes au système d'équations intégrales complètes de ces équations différentielles, au moyen de quoi les variables dépendantes se déterminent en fonction de α_1 et des valeurs initiales correspondantes à $\alpha_1 = \alpha_1^0$.

Si l'on ajoute à ce qui vient d'être dit la remarque [que l'on eût déjà pu utiliser dans le paragraphe précédent pour montrer que les expressions $B_h(\chi_k)$ obtenues dans ce paragraphe doivent être nulles identiquement], que des équations qui appartiennent à un

---

([1]) On peut aussi démontrer cela directement. Par hypothèse, on a

$$B_1(F) = 0,$$

et par suite

$$B_1(U) = 0,$$

et, à cause de la relation

$$B_1[B_h(f)] = B_h[B_1(f)],$$

on a aussi

$$B_1[B_h(U)] = 0.$$

La valeur que prend $B_h(U)$ pour les solutions complètes des équations différentielles (25) est donc indépendante de α_1. Mais cette valeur s'évanouit pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, puisqu'on a alors $x_m = x_m^0, \ldots, x_n = x_n^0$; il en résulte que, d'après (30), $\frac{\partial U}{\partial \alpha_h} = 0$, et qu'en même temps chacune des quantités b_h^k s'évanouit.

tel système d'équations intégrales complètes, jamais aucune ne peut être complétement indépendante des valeurs initiales des variables dépendantes, ou que, si une telle équation se présente, elle doit être nécessairement identique, on est conduit à la marche suivante pour *parvenir de l'intégrale donnée* F = const. *ou* U = o *des équations* (25) *à une solution du système jacobien* (29).

En résolvant l'intégrale U = o relativement à une quelconque des valeurs initiales des variables dépendantes qu'elle contient, par exemple, relativement à x_m^0, ramenons cette équation à la forme

(33) $$x_m^0 = U_m(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0),$$

et formons ainsi les $m-1$ équations

(34) $$B_h(U_m) = \frac{\partial U_m}{\partial \alpha_h} + \sum_{k=m}^{k=n} b_k^h \frac{\partial U_m}{\partial x_k} = o,$$

dont la première est identique. Aucune de ces équations ne peut être une simple conséquence algébrique de l'équation (33), puisque x_m^0 n'y entre pas. Si elles sont, comme la première, toutes identiques par elles-mêmes, la valeur U_m de x_m^0 tirée de U = o est alors une solution commune des $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles (29). S'il n'en est pas ainsi, on devra toujours pouvoir encore tirer des équations (34) une partie des autres valeurs initiales $x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0$, puisque, d'après ce qui précède, il est impossible d'éliminer complétement toutes ces valeurs initiales. Admettons que nous puissions déterminer $x_{m+1}^0, \ldots, x_{m+h-1}^0$ au moyen des équations (34); nous pourrons opérer maintenant avec chacune des valeurs ainsi obtenues :

$$x_{m+1}^0 = U'_{m+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n, x_{m+h}^0, \ldots, x_n^0),$$
$$\ldots\ldots,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{m+h-1}^0 = U'_{m+h-1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0),$$

comme on a opéré avec l'équation (33), et nous parviendrons ainsi à obtenir des équations qui ne pourront être de simples conséquences algébriques des précédentes, puisqu'elles ne contiendront pas les quantités

$$x_m^0, \ldots, x_{m+h-1}^0,$$

et qui, au contraire, seront identiques par elles-mêmes, ou qui

serviront à leur tour à déterminer une partie des valeurs initiales restantes. De cette manière, si l'on n'est pas déjà parvenu à une solution commune des $m-1$ équations (29), on devra nécessairement finir par arriver à exprimer, au moyen des seules quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, x_m, \ldots, x_n$, toutes les valeurs initiales des variables dépendantes contenues dans l'intégrale donnée $U=0$. Si l'on forme maintenant, avec une quelconque de ces expressions, les $m-1$ équations $B_h(f)=0$, celles-ci ne contiendront aucune des valeurs initiales, et devront, par conséquent, être identiques par elles-mêmes. Chacune de ces expressions est ainsi (ce qui résulte d'ailleurs du paragraphe précédent) une solution du système jacobien (29), et par suite aussi, lorsqu'on aura remis pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ leurs valeurs tirées des substitutions (23), une solution du système jacobien (28).

Ainsi, pour trouver une solution du système jacobien de $m-1$ équations linéaires aux différentielles partielles contenant n variables indépendantes, il n'est besoin que de connaître une intégrale quelconque des équations différentielles ordinaires (25).

Les meilleures méthodes [1] connues exigeaient, pour arriver au même résultat, la connaissance d'une intégrale de chacun de $m-1$ systèmes, dont le premier comprenait $n-m+1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre, et les autres autant ou un moindre nombre de ces équations.

VI.

L'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre et le problème de Pfaff.

On sait que Jacobi a ramené l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre au problème de la détermination successive d'une solution de chaque système d'une suite de systèmes jacobiens d'équations linéaires aux différentielles partielles de la forme (28). Si, dans l'équation aux différentielles partielles donnée, que l'on peut supposer ne pas contenir la fonction inconnue elle-même, il y a n variables indépendantes, ces sys-

---

(1) *Voir* Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 65, p. 261.

tèmes jacobiens contiendront alors respectivement

$$1,\ 2,\ \ldots,\ m-1,\ \ldots,\ n-1$$

équations linéaires aux différentielles partielles, avec

$$2n-1,\ 2n-2,\ \ldots,\ 2n-m+1,\ \ldots,\ n+1$$

variables indépendantes.

D'après la méthode exposée dans le paragraphe précédent, on sait que, *pour obtenir la solution complète de l'équation donnée, on n'a besoin que de connaître une seule intégrale de chacun des systèmes de*

$$2(n-1),\ 2(n-2),\ 2(n-m+1),\ \ldots,\ 2$$

équations différentielles ordinaires du premier ordre, tandis que, anciennement ([1]), on avait besoin d'une intégrale pour un système de $2(n-1)$ équations différentielles ordinaires et pour deux systèmes de

$$2(n-2),\ \ldots,\ 2(n-m+1),\ \ldots,\ 2$$

équations différentielles ordinaires, et que, dans les cas défavorables, ce nombre d'intégrations pouvait n'être pas encore suffisant.

Quand on choisit la forme la plus simple des substitutions (23), l'intégration s'effectue de la manière suivante :

En général, le $(m-1)^{\text{ième}}$ système jacobien ([2]) est de la forme

$$(35)\qquad A_h(f)=\frac{\partial f}{\partial q_h}+\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n}\left(\frac{\partial p_h}{\partial q_\lambda}\frac{\partial f}{\partial p_\lambda}-\frac{\partial p_h}{\partial p_\lambda}\frac{\partial f}{\partial q_\lambda}\right)=0,$$
$$h=1,\ 2,\ldots,\ m-1,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_m, \ldots, p_n$ déterminées au moyen du système jacobien précédent, et pour lesquelles les expressions

$$A_h[A_i(f)]-A_i[A_h(f)]$$

sont identiquement nulles.

---

(1) *Voir* Clebsch, *Journal de Crelle*, t. 65, p. 265.

(2) *Voir* Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*, p. 292, et *Journal de Crelle*, t. 60, p. 23.

Si l'on pose maintenant

$$(36)\quad q_1 = \alpha_1,\quad q_2 = q_2^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_2,\quad \ldots,\quad q_{m-1} = q_{m-1}^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\alpha_{m-1},$$

$\alpha_1^0, q_2^0, \ldots, q_{m-1}^0$ étant des constantes choisies arbitrairement, sous la condition que les fonctions $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ conservent des valeurs finies et déterminées pour

$$q_1 = \alpha_1^0,\quad q_2 = q_2^0,\quad \ldots,\quad q_{m-1} = q_{m-1}^0,$$

et qu'on élimine par ce moyen $q_1, q_2, \ldots, q_{m-1}$ des expressions

$$(37)\qquad \begin{cases} w_1 = p_1 + \alpha_2 p_2 + \ldots + \alpha_{m-1} p_{m-1}, \\ w_i = (\alpha_1 - \alpha_1^0) p_i, \quad i > 1, \end{cases}$$

on transforme ainsi le système jacobien (35) dans le suivant :

$$(38)\qquad B_k(f) = \frac{\partial f}{\partial \alpha_k} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \left(\frac{\partial w_k}{\partial q_\lambda} \frac{\partial f}{\partial p_\lambda} - \frac{\partial w_k}{\partial p_\lambda} \frac{\partial f}{\partial q_\lambda} \right) = 0.$$

On peut, en se servant des explications données dans le paragraphe précédent, trouver une solution de ce système, dès que l'on connaîtra une intégrale du système de $2(n - m + 1)$ équations différentielles ordinaires

$$(39)\qquad \frac{dq_\lambda}{d\alpha_1} = \frac{\partial w_1}{\partial p_\lambda},\quad \frac{dp_\lambda}{d\alpha_1} = \frac{\partial w_1}{\partial q_\lambda},$$
$$\lambda = m,\quad m+1,\quad \ldots,\quad n,$$

et il suffit dans cette solution de poser

$$\alpha_1 = q_1,\quad \alpha_2 = \frac{q_2 - q_2^0}{q_1 - \alpha_1^0},\quad \ldots,\quad \alpha_{m-1} = \frac{q_{m-1} - q_{m-1}^0}{q_1 - \alpha_1^0},$$

pour en déduire une solution du système donné (35).

Par une méthode tout à fait analogue à celle qu'on a employée pour l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre, on peut aussi, dans le problème de Pfaff, c'est-à-dire dans le problème de l'intégration de l'équation différentielle linéaire donnée

$$\chi_1\, dx_1 + \chi_2\, dx_2 + \ldots + \chi_{2n}\, dx_{2n} = 0,$$

réduire, par le procédé indiqué, le nombre des intégrations né-

cessaires presque de moitié. On reconnaît, en effet, sans difficulté, en examinant la méthode que Clebsch a donnée pour la résolution de ce problème[1], que celui-ci peut se ramener à la détermination d'une solution de chacun de n systèmes jacobiens de la forme (28), composés respectivement de $1, 2, \ldots, n$ équations aux différentielles partielles à $2n$ variables indépendantes chacune. En vertu de ce qui précède, la détermination d'une solution du $i^{\text{ième}}$ de ces systèmes ne dépend que du calcul d'une intégrale de $2n - i$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. Mais ce $i^{\text{ième}}$ système, que l'on ne peut former qu'après avoir trouvé une solution de chacun des précédents, possède lui-même, par suite de la manière dont il résulte de ceux-ci, $i - 1$ solutions connues. Aucune de ces solutions n'est celle que l'on emploie réellement (celle-ci devant être indépendante de celles-là); mais chacune d'elles, exprimée au moyen des nouvelles variables α et égalée à une constante, nous fournit une intégrale de ces $2n - i$ équations différentielles ordinaires. On connaît donc d'avance $i - 1$ intégrales de ces équations, et l'on peut par leur moyen ramener les $2n - i$ équations différentielles à

$$2n - i - (i - 1) = 2n - 2i + 1.$$

La détermination d'une solution utile du $i^{\text{ième}}$ système jacobien n'exige par conséquent que la connaissance d'une intégrale de $2n - 2i + 1$ équations différentielles ordinaires du premier ordre. Ainsi :

Pour la solution complète du problème de Pfaff, il suffit de connaître une intégrale de chacun des systèmes de

$$2n - 1,\ 2n - 3,\ 2n - 5,\ \ldots,\ 1,$$

équations différentielles ordinaires du premier ordre.

§ VII.

Autre démonstration du théorème du § III.

Dans l'hypothèse où l'on a les identités

(40) $$A_i(a_k^h) - A_h(a_k^i) = 0,$$

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 65, p. 260.

les $m - 1$ équations linéaires aux différentielles partielles

$$(41)\qquad A_h(f) = \frac{\partial f}{\partial x_h} + \sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} a_\lambda^h \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = 0$$

possèdent, comme Clebsch l'a remarqué (¹), $n - m + 1$ solutions indépendantes entre elles, que nous désignerons par

$$f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n.$$

Puisque, en posant

$$f = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n),$$

on a

$$A_h(f) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_h} + \sum_{k=m}^{k=n} A_h(f_k)\frac{\partial \varphi}{\partial f_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\lambda},$$

on voit que ces solutions sont indépendantes entre elles par rapport à $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$.

Si l'on pose donc

$$(42)\qquad f_m = c_m,\quad f_{m+1} = c_{m+1},\quad \ldots,\quad f_n = c_n,$$

on devra pouvoir, au moyen de ces équations, déterminer x_m, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ en fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et des quantités $c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n$.

Si l'on considère ces dernières quantités comme des constantes arbitraires, les valeurs de $x_m, \ldots, x_n$ tirées des équations (42) satisferont aux $n - m + 1$ équations

$$\sum_{\lambda=m}^{\lambda=n} \frac{\partial f^k}{\partial x_\lambda}\left(dx_\lambda - \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h dx_h\right) = 0,$$

que l'on obtient par la différentiation complète des équations (42) en ayant égard aux identités $A_h(f_k) = 0$. D'ailleurs le déterminant de ces équations :

$$\sum \pm \frac{\partial f_m}{\partial x_m}\frac{\partial f_{m+1}}{\partial x_{m+1}} \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

(¹) *Voir* notamment *Journal de Crelle*, t. 61, p. 153, et t. 65, p. 266.

ne s'annulant pas de lui-même, et ne pouvant conséquemment devenir identiquement nul par la substitution de ces valeurs, il s'ensuit que ces valeurs doivent aussi satisfaire aux $n-m+1$ équations linéaires aux différentielles totales

$$(43)\qquad dx_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} a_\lambda^h dx_h.$$

Mais, si les identités (40) ont lieu, il existera toujours $n-m+1$ fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ et de $n-m+1$ constantes arbitraires $c_m, c_{m-1}, \ldots, c_n$ (fonctions indépendantes entre elles par rapport à cescons tantes), lesquelles, mises pour $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$, satisferont identiquement aux équations (43).

Représentons les solutions du système (43) par

$$(44)\qquad x_\lambda = \varphi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, c_m, \ldots, c_n),$$

et désignons par $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ des constantes indéterminées; les $n-m+1$ équations

$$x_\lambda = \varphi_\lambda(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_{m-1}^0, c_m, \ldots, c_n)$$

pourront toujours être résolues par rapport à $c_m, \ldots, c_n$. Par la substitution de ces valeurs, les solutions (44) prendront la forme

$$(45)\qquad x_\lambda = \psi_\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0),$$

la fonction ψ_h devant, en vertu de son origine, se réduire à x_λ^0 pour

$$x_1 = x_1^0,\quad x_2 = x_2^0,\ \ldots,\quad x_{m-1} = x_{m-1}^0.$$

En introduisant maintenant à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ les nouvelles variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, au moyen des $m-1$ équations

$$(46)\qquad x_h = x_h^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0) f_h(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}),$$

ce qui donne

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} &\psi_h(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \\ &= \Psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_1^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0), \end{aligned}\right.$$

on obtiendra, en vertu de (45), les solutions

$$(48)\qquad x_\lambda = \Psi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}, \alpha_1^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n)$$

du système d'équations linéaires aux différentielles totales entre $x_m, \ldots, x_n$ et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$,

$$(49) \qquad dx_\lambda = \sum_{h=1}^{h=m-1} b_\lambda^h \, d\alpha_h,$$

dans lequel le système (43) se change par la substitution (46).

D'après cela, les équations (48) satisfont aussi en particulier aux $n-m+1$ équations différentielles ordinaires

$$(50) \qquad \frac{\partial x_\lambda}{\partial \alpha_1} = b_\lambda^1.$$

Si l'on a choisi la constante α_1^0 de telle sorte qu'aucune des $m-1$ fonctions f_h ne devienne infinie ou indéterminée pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, chacune des quantités x_h se réduira à x_h^0 pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, et par suite, d'après (47), on aura aussi

$$\Psi_\lambda = x_\lambda^0.$$

Ainsi les équations (48) sont précisément les solutions des équations différentielles ordinaires (50) qui se réduisent, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, aux valeurs des variables dépendantes x_λ qui correspondent à la valeur initiale α_1^0 de α_1.

Réciproquement, il doit être toujours possible de déterminer les constantes d'intégration d'un système de solutions complètes des $n-m+1$ équations différentielles ordinaires (50), de telle sorte que, pour $\alpha_1 = \alpha_1^0$, ces solutions prennent les valeurs encore arbitraires $x_m^0, x_{m-1}^0, \ldots, x_n^0$, et les solutions ainsi obtenues devront, si l'on y considère ces valeurs initiales comme indépendantes de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, satisfaire en même temps aux équations aux différentielles totales (49); et par suite, lorsqu'on y a remis pour $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ leurs valeurs tirées des substitutions (46), elles devront aussi satisfaire aux équations aux différentielles totales (43).

Leipzig, février 1872.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RUBINI (R.). — ELEMENTI DI CALCOLO INFINITESIMALE. Seconda edizione riveduta ed aumentata. — Napoli, 1874-1875; 2 vol. grand in-8, 288-365 p. Prix : 12 lires.

Nous annonçons avec plaisir la seconde édition de cet Ouvrage, dont le succès a répondu aux soins donnés déjà par l'auteur à la première édition, et ne fera que grandir par suite des nouveaux efforts qu'il a faits pour y apporter encore de nombreux perfectionnements.

On reconnaît dans le Livre de M. Rubini l'œuvre d'un professeur expérimenté, qui sait appeler l'attention du lecteur sur les points importants et délicats, en introduisant dans le texte des remarques et des rapprochements très-utiles pour aider l'intelligence et la mémoire, et que l'on ne rencontre ordinairement que dans l'enseignement oral.

Parmi les additions qui distinguent la nouvelle édition, nous citerons des recueils d'énoncés de problèmes relatifs aux diverses parties de l'Ouvrage, et qui rendront de grands services, tant aux personnes étudiant seules qu'au professeur, dont la tâche sera ainsi facilitée.

Le premier Volume, consacré au Calcul différentiel, se divise en deux Livres :

Le Livre I (*Algorithme du Calcul différentiel*) comprend trois Chapitres.

CHAPITRE I. — *Objet du Calcul différentiel. — Dérivées et différentielles des fonctions d'une ou de plusieurs variables.*

La question difficile de l'existence de la dérivée et des conséquences immédiates de cette hypothèse, pour l'établissement des premiers principes fondamentaux du Calcul infinitésimal, n'est peut-être pas traitée ici avec toute la rigueur que l'on exige maintenant, et dont on trouve un modèle dans le *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Serret.

CHAPITRE II. — *Dérivées et différentielles des divers ordres d'une fonction d'une ou de plusieurs variables.*

CHAPITRE III. — *Du changement de variables. — De l'élimina-*

tion des constantes et des fonctions. — Des fonctions imaginaires. — Déterminants fonctionnels.

La question de l'élimination des constantes et des fonctions arbitraires nous aurait paru mieux à sa place dans la théorie des équations différentielles et aux dérivées partielles, dont elle sert à faire comprendre la formation.

A la dénomination de *fonctions imaginaires* nous aurions préféré celle de *fonctions complexes*, plus en harmonie avec les idées actuelles sur ces sortes de quantités.

Le Livre II a pour titre : *Applications du Calcul différentiel*, et contient les Chapitres suivants :

Chapitre I. — *Formules pour le développement en séries. — Des expressions qui se présentent sous forme indéterminée. — Valeurs maxima et minima d'une fonction d'une ou de plusieurs variables.*

Chapitre II. — *Applications du Calcul différentiel aux courbes planes.*

Chapitre III. — *Applications du Calcul différentiel aux surfaces.*

Chapitre IV. — *Application du Calcul différentiel aux courbes dans l'espace.*

Chapitre V. — *Autres applications aux surfaces.*

Questions à résoudre comme exercices.

Le second Volume traite du Calcul intégral, et se compose de trois Livres.

Le Livre I (*Intégration générale des fonctions d'une ou de plusieurs variables*) se divise en cinq Chapitres, précédés de *Définitions et principes généraux.*

Chapitre I. — *Intégration des fonctions algébriques rationnelles, de certaines fonctions irrationnelles et des fonctions exponentielles, logarithmiques, trigonométriques et circulaires.*

Chapitre II. — *Intégrales définies. — Différentiation et intégration sous le signe intégrale. — Intégrales multiples.*

Chapitre III. — *Intégrales eulériennes. — Intégration par séries ordonnées suivant les sinus ou les cosinus d'arcs multiples.*

L'auteur donne un aperçu des formules de Fourier, dont il attribue, comme la plupart des écrivains, la première idée à Lagrange. *Voir* à ce sujet une rectification de Riemann (*Bulletin*, t. V, p. 27).

CHAPITRE IV. — *Application des théories précédentes à la rectification des courbes, à la quadrature des surfaces et à la cubature des solides.*

CHAPITRE V. — *Intégrales multiples. — Intégration des fonctions de plusieurs variables.*

Le Livre II traite *De l'intégration des équations différentielles.*

CHAPITRE I. — *Intégration des équations différentielles du premier ordre entre deux variables, et des équations aux différentielles totales entre trois variables ou plus.*

CHAPITRE II. — *De l'intégration des équations différentielles d'ordre supérieur entre deux variables.*

Dans ce Chapitre, l'auteur a remis en évidence l'élégante méthode de Brunacci pour l'intégration des équations linéaires à coefficients constants (1).

CHAPITRE III. — *Intégration des équations au moyen des séries ou des intégrales définies. — Application de l'intégration des équations à la sommation des séries ou au calcul des intégrales définies. — Solutions ou intégrales singulières des équations d'ordre supérieur au premier.*

CHAPITRE IV. — *Intégration des équations simultanées.*

CHAPITRE V. — *Intégration des équations aux dérivées partielles.*

Le Livre III a pour objet *le calcul des variations, le calcul direct et le calcul inverse des différences finies,* et comprend trois Chapitres correspondant à ces trois théories. J. H.

STUDNIČKA (Dr F.-J.). — ZÁKLADOVÉ NAUKY O ČÍSLEK; pro milovníky počtářství vůbec a studující zvlášť'. *Kniha* I : O vlastnostech čísel prostých a jich upotřebení. S dřevorytinami. — V Praze, tiskem dra. Edv. Grégra. Nákladem jednoty českych mathematiků. 1875 (2).

La plupart des Ouvrages qui traitent de la théorie des nombres s'adressent aux personnes déjà familières avec les méthodes d'ana-

(1) BRUNACCI, *Calcolo integrale delle equazioni lineari*, Firenze, 1798; p. 86.

(2) STUDNIČKA (F.-J.), *Éléments de la Théorie des nombres;* pour les amateurs de l'Arithmétique, et en particulier pour les étudiants. *Livre I :* Sur les propriétés des nombres premiers et leur application. Avec figures sur bois. — Prague, imprimerie du Dr Éd. Grégr. Aux frais de la Société Mathématique de Bohême. — In-8°, 154 p.

lyse, et leur lecture présente de sérieuses difficultés à ceux qui ne connaissent que les premiers éléments d'Arithmétique et d'Algèbre. M. Studnička a voulu faire un Livre accessible à un public moins savant, tout en conservant aux théories leur rigueur et leur forme complète, et nous croyons pouvoir dire qu'il y a réussi, dans la partie publiée que nous avons sous les yeux. Pour cela, il lui a suffi de reprendre les théories d'un peu plus haut que ses prédécesseurs, de ne pas omettre les explications nécessaires aux commençants, et de multiplier les exemples et les applications.

L'Ouvrage commence par un aperçu de quelques pages « sur l'origine et le développement de la Théorie des nombres », que l'auteur divise en deux époques : I, de Pythagore à Fermat; II, de Fermat jusqu'à nos jours.

L'*Introduction,* qui vient ensuite, comprend les paragraphes suivants : 1. Sur les nombres en général. 2. Sur les systèmes de numération. 3. Sur les opérations arithmétiques. Notions sur les nombres complexes $a+b\sqrt{-1}$.

Livre I. — *Sur les propriétés des nombres premiers et leur application.*

Section I. *Propriétés des suites de nombres.* — 4. Partage de la série naturelle des nombres. Diverses formes $2n+r$, $3n+r$, ... 5. Nombres figurés en général. Triangle de Pascal. 6. Nombres polygones et multilatères. 7. Nombres polyèdres.

Section II. *Divisibilité des nombres.* — 8. Sur les relations mutuelles de deux nombres en général. 9. Caractères de divisibilité. 10. Propriétés des diviseurs. 11. Des nombres premiers entre eux.

Section III. *Des résidus du premier degré.* — 12. Des résidus en général. 13. Théorème de Fermat. 14. Théorème de Wilson et sa liaison avec le théorème de Fermat. 15. Sur la congruence des nombres.

Section IV. *Résolution des équations indéterminées du premier degré.* — 16. Sur la nature de ce problème. 17. Résolution des équations indéterminées dans des cas particuliers. 18. Résolution au moyen du théorème de Fermat. 19. Résolution au moyen des résidus. 20. Résolution au moyen des valeurs approchées des fractions continues.

Section V. *Résolution des congruences.* — 21. Résolution des

congruences à une seule inconnue. **22.** Résolution des congruences par la décomposition du module. **23.** Résolution d'un système de congruences simples. **24.** Résolution d'un système de congruences composées.

Table des nombres premiers entre 1 et 10000. J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON.

T. XXXVI; février 1876.

RAPPORTS ANNUELS

ADRESSÉS AU CONSEIL DE LA SOCIÉTÉ ROYALE ASTRONOMIQUE, PAR LES DIRECTEURS DES DIFFÉRENTS OBSERVATOIRES DE LA GRANDE-BRETAGNE (1).

I. — Observatoire Royal de Greenwich.

En dehors de ses travaux ordinaires et pour ainsi dire fondamentaux, observations de la Lune et formation de Catalogues d'étoiles, l'Observatoire royal de Greenwich a terminé l'installation de son service d'Astronomie physique. Pendant toute l'année, le grand équatorial et celui du Sheepshanks ont été consacrés à l'observation des phénomènes des satellites de Jupiter et surtout à l'étude spectroscopique continue du Soleil et des principales étoiles.

La mesure du déplacement des raies dans les spectres des étoiles donne immédiatement, on le sait, la valeur et la direction de leur mouvement propre; mais, jusqu'ici, la Science ne possède qu'un petit nombre de déterminations, faites presque toutes par deux observateurs, d'ailleurs fort distingués, M. Huggins en Angleterre et M. Vogel en Allemagne, et il restait quelques doutes sur la précision et la sensibilité de la méthode. Or les résultats des mesures faites à Greenwich, sous la direction de M. Christie, s'accordent

(1) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 267.

de la façon la plus satisfaisante avec ceux qu'avait autrefois obtenus M. Huggins; toujours le sens du mouvement est le même, et la différence maximum des vitesses trouvées par les deux astronomes ne dépasse pas 10 milles par seconde.

La Physique solaire a été suivie avec beaucoup de soin; pendant qu'avec le spectroscope de Spottiswoode on étudiait et dessinait les protubérances, on prenait aussi souvent que possible des images du Soleil avec le photohéliographe. On a pu constater ainsi la simultanéité complète entre l'absence de taches sur la surface de l'astre radieux et la disparition des protubérances gazeuses qui l'entourent d'ordinaire.

La mesure des aires des taches et facules photographiées en 1874 est d'ailleurs entièrement terminée.

L'initiative intelligente prise par M. Airy a donc été couronnée d'un succès mérité; l'Observatoire de Greenwich aura bientôt recueilli des documents aussi rares qu'utiles et précieux.

II. — Observatoire de Radcliffe, à Oxford.

L'Observatoire de Radcliffe, outre son travail ordinaire d'observations, qui est assez connu de nos lecteurs, a continué la mise à jour de la réduction et de la publication de ses travaux antérieurs. Le Volume de 1873 vient d'être publié; il renferme 1496 observations d'étoiles, 95 du Soleil, 55 de la Lune, 20 de Mercure, 33 de Vénus, 24 de Mars et 18 de Saturne.

III. — Observatoire de l'Université d'Oxford.

Cet Observatoire, destiné à des études d'Astronomie physique, est aujourd'hui complétement installé.

Le programme des travaux que M. Pritchard se propose d'exécuter est le suivant :

1° Observation des comètes nouvelles, calcul de leurs orbites, étude de leurs spectres et de leurs relations avec les étoiles filantes;

2° Observation de quelques systèmes binaires;

3° Photographies lunaires en vue de l'existence d'une libration physique.

Ces études photographiques sont déjà commencées et paraissent en excellente voie.

IV. — Observatoire de Cambridge.

On a continué à Cambridge l'observation des étoiles de la zone que l'on s'est engagé à observer pour la Société Astronomique allemande.

V. — Observatoire Royal de Dunsink (Dublin).

L'année a été presque entièrement consacrée à l'installation et à l'étude du nouveau cercle méridien et de la nouvelle pendule sidérale. M. Ball a néanmoins fait avec l'équatorial du Sud quelques observations destinées à donner la parallaxe annuelle.

VI. — Observatoire Royal d'Édimbourg.

On n'a pas fait cette année de travail astronomique à Edimbourg. Le budget annuel de l'établissement, qui n'est que de 26750 francs, a été entièrement absorbé par le service météorologique de l'Écosse.

VII. — Observatoire de Glasgow.

Les ressources de cet établissement ont été surtout consacrées à la réduction et la publication des observations faites depuis 1860. On n'a fait d'autres observations que celles nécessaires à la transmission de l'heure au port et à la ville de Glasgow.

VIII. — Observatoire de Kew.

On a réinstallé le photohéliographe qui avait été envoyé à Greenwich en février 1873, et toutes les dispositions sont prises pour recommencer prochainement le beau travail sur les taches solaires que M. Warren de la Rue y avait inauguré.

IX. — Observatoire de Liverpool (Bidston, Birkenhead).

M. Hartnup a continué ses belles études sur les chronomètres de la marine marchande. L'Observatoire a abaissé à 25 francs la somme à payer par les armateurs pour obtenir la marche exacte d'un chronomètre et la loi de sa variation avec les changements de la température.

X. — Observatoire de l'École de Rugby.

L'année 1875 a été surtout employée à des mesures d'étoiles doubles avec l'équatorial d'Alvan Clark; on a étudié ainsi 303 de ces systèmes stellaires.

Quant au télescope de $0^{m},30$, il a servi à dessiner les protubérances solaires. D'ailleurs, à cause du petit nombre de ces protubérances qui ont été visibles cette année, on a substitué à la fente annulaire qui montrait à la fois, dans le champ, la moitié de la chromosphère, une fente bornée à un segment de cercle et qui donne environ 20 degrés du limbe solaire; on obtenait ainsi une image plus agrandie de la photosphère.

XI. — Observatoire de Stonyhurst.

En l'absence du Dr Perry, en mission à l'île de Kerguelen pour le passage de Vénus, on s'est borné à observer les phénomènes des satellites de Jupiter, les occultations et les météores de novembre.

XII. — Observatoire de M. Barclay (Leyton, Essex).

L'Observatoire de Leyton est, on le sait, spécialement consacré à l'étude des étoiles doubles. Pendant l'année qui vient de s'écouler, les astronomes de M. Barclay ont observé un certain nombre de systèmes binaires que, peu de temps avant sa mort, sir John Herschel avait recommandés à leur attention.

XIII. — Observatoire du colonel Cooper (Markree).

Le Dr Doberck, qui est aujourd'hui chargé de la direction de cet antique et célèbre établissement, s'occupe activement de remettre tout en état. Depuis la mort de M. Cooper, l'Observatoire avait été inoccupé; aussi M. Doberck a-t-il trouvé les salles d'instruments ouvertes pour ainsi dire à tous les vents et ceux-ci exposés à toutes les intempéries des saisons. Il y a là presque à refaire une installation nouvelle : elle a dû être terminée à la fin de 1875.

XIV. — Observatoire de M. Edward Crossley (Bermerside, Halifax).

L'observation d'étoiles doubles et des phénomènes des satellites de Jupiter, tels sont les travaux principaux de ce petit et nouvel Observatoire, qui semble dirigé par un astronome actif et intelligent. On a mis en même temps à jour les mesures d'étoiles doubles faites depuis 1869.

XV. — Observatoire de lord Lindsay (Dun Echt).

Le noble lord et ses astronomes ont consacré l'année 1875 à la réduction des observations faites lors du passage de Vénus et à la détermination des différentes corrections instrumentales qu'elle nécessite.

XVI. — Observatoire du comte de Rosse (Birr-Castle, Parsonstown).

Les observations ont été reprises d'une façon régulière à Parsonstown, quoique le télescope de 3 pieds ne soit point encore réinstallé. Continuant l'une des plus belles recherches de son père, le comte de Rosse s'est surtout attaché aux observations des nébuleuses et aux mesures de leurs positions et de leurs distances par rapport aux étoiles voisines.

XVII. — Observatoire du colonel Tomline (Orwell Park, Ipswich).

L'outillage de l'Observatoire pour l'observation des comètes a été complété vers le milieu de cette année, mais seulement après l'apparition de la comète d'Encke. Le travail important de l'Observatoire a donc consisté dans des observations de la Lune et de ses étoiles en vue d'une détermination de la longitude.

XVIII. — Observatoire Royal du Cap de Bonne-Espérance.

On a continué à l'Observatoire du Cap la révision du ciel austral. M. Stone, on le sait, la limite aux étoiles de grandeur au plus égale à la 7[e] (d'après l'échelle de La Caille.) On a terminé cette année la zone comprise entre 145 et 155 degrés de distance polaire Nord; les 1700 étoiles que renferme cette zone ont été chacune observées trois fois. On a préparé en outre le Catalogue préliminaire

pour la zone 135 à 145 degrés et terminé les réductions relatives à la zone comprise entre 155 et 165 degrés de distance polaire Nord.

Ajoutons que M. Stone vient de recevoir d'Angleterre un photohéliographe et un spectroscope et qu'il compte consacrer une partie des ressources de son établissement à des études d'Astronomie physique qui seront un complément fort utile de celles qu'ont entreprises les Observatoires de Greenwich et d'Oxford.

XIX. — Observatoire d'Adélaïde.

Le Directeur du service télégraphique de l'Australie du Sud, M. Todd, paraît avoir réussi à commencer enfin l'Observatoire qu'il désire depuis si longtemps. A l'occasion du passage de Vénus, le gouvernement avait acheté un équatorial de Cooke de $0^m,20$ d'ouverture, équatorial que M. Todd a fait, dès son arrivée, installer d'une façon définitive. C'est le premier instrument sérieux dont dispose le nouvel Observatoire d'Adélaïde : bientôt arrivera à l'Observatoire un cercle méridien de $0^m,13$ d'ouverture, qui remplacera le petit instrument des passages de $0^m,03$ d'ouverture employé jusqu'alors par M. Todd et avec lequel il donnait l'heure à la ville.

XX. — Observatoire de Melbourne.

L'outillage de l'Observatoire de Melbourne a été considérablement augmenté pendant l'année qui vient de s'écouler : c'est encore l'observation du passage de Vénus qui a fait décider l'acquisition de ces instruments nouveaux. Ce sont un photohéliographe, un équatorial de $0^m,20$ d'ouverture, dû à Troughton et Simms, un petit équatorial de $0^m,11$ d'ouverture dû à Cooke, un micromètre à double image de Browning et deux chronographes.

Les instruments méridiens ont d'ailleurs été employés comme à l'ordinaire à la formation d'un Catalogue austral, et le grand télescope a surtout servi à dessiner quelques-unes des belles nébuleuses du ciel austral et à encarter les étoiles voisines : on a ainsi obtenu les dessins de dix des nébuleuses étudiées autrefois par sir John Herschel.

On a repris, en outre, l'étude de la nébuleuse voisine de η d'Argus et des étoiles qui l'accompagnent, et l'on n'a pu constater dans cet immense amas de matières cosmiques aucun changement appréciable.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES (¹). — Troisième Série, publiée par M. RESAL.

T. I (suite); juin-décembre 1875.

CATALAN (E.). — *Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet.* (32 p.)

Ce Mémoire contient un assez grand nombre de résultats nouveaux et des procédés ingénieux pour obtenir simplement des résultats déjà connus, relativement à des intégrales définies, à des sommes de séries, à des limites de produits infinis qui peuvent être rapprochées de la théorie des fonctions eulériennes.

Nous citerons en particulier l'identité remarquablement simple

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2n},$$

que l'auteur donne au début de son travail, et les résultats suivants :

$$\int_0^1\left[2\frac{1-qk'}{1-q^2}+\frac{1-k'}{ql(q)}\right]\omega\,dq=\pi l(2),$$

$$1-C-\frac{1}{2}l(2)=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{e^z-e^{-z}-2z}{2e^z(e^z-1)}dz,$$

C étant la constante d'Euler;

$$\int_0^1\frac{x^{\frac{\mu-1}{2}}+x^{\frac{\mu}{2}}-2x^\mu}{1-x}dx=2l(2);$$

si $\varpi(\mu)$ représente la fonction de Binet, savoir

$$\varpi(\mu)=\int_0^\infty\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}dx,$$

on a

$$\varpi(\mu)=-\frac{1}{2}l(2\mu\pi)+\int_0^1\frac{dx}{(1+x)l(x)}\left[-1+\frac{x^{2\mu}}{2}+\frac{x^{4\mu}}{4}+\frac{x^{6\mu}}{6}+\ldots\right].$$

(¹) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 121.

Allégret. — *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* (22 p.)

L'auteur expose d'une façon nouvelle la méthode de Jacobi et indique quelques simplifications pratiques.

Breton (de Champ). — *Réponse à la Note de M. J. Bertrand, relative à l'article : « Sur de prétendues inadvertances de Lagrange ».* (2 p.)

Laguerre. — *Sur les singularités des courbes de quatrième classe.*

Étant données deux équations à une inconnue, de degré m, $F=0$ et $F'=0$, déterminant par leurs racines deux systèmes de points situés sur une même droite (ou deux faisceaux de droites passant par un même point), M. Laguerre nomme ces systèmes (ou ces faisceaux) *harmoniques*, si l'invariant quadratique des deux formes F et F' est nul. Le lieu des points d'où l'on voit deux courbes de $n^{\text{ième}}$ classe suivant deux faisceaux harmoniques est une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre, qui est dite la *courbe harmonique* des deux premières, ou de deux quelconques des courbes du faisceau qu'elles déterminent, ou plus simplement de ce faisceau.

Après avoir posé ces définitions, l'auteur démontre les théorèmes suivants :

Étant donnée une courbe de quatrième classe K, *si l'on considère les différentes droites que l'on peut mener par un point* M, *leurs premières polaires relativement à* K *forment un faisceau de courbes de troisième classe dont la courbe harmonique est la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe du quatrième ordre* S *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

Si la première polaire d'une droite P, *relativement à la courbe de quatrième classe* K, *se décompose en un point p et une conique résiduelle, la droite* P *est la droite polaire de p, relativement à la courbe du quatrième ordre* S, *qui passe par les vingt-quatre points de rebroussement de* K.

Si les vingt-huit points doubles d'une courbe de quatrième classe K *sont situés sur une courbe de sixième ordre, elle fait partie d'un couple harmonique : la réciproque est également vraie.*

(L'auteur dit que deux courbes de même classe forment un couple

harmonique, si elles sont vues d'un point quelconque du plan suivant deux faisceaux harmoniques).

ALLÉGRET. — *Mémoire sur le problème des trois corps.* (40 p.)

Ce Mémoire comprend trois Sections. Dans la première Section, l'auteur étend la réduction de Jacobi (par laquelle l'équation dont le problème dépend est ramenée au sixième ordre) au cas de $n+1$ corps, soumis à leurs attractions mutuelles. L'ordre $6n$ des équations du mouvement peut toujours être abaissé de six unités.

Dans la Section suivante, après avoir rattaché les mêmes équations à une autre aux dérivées partielles à $3n$ variables indépendantes, l'auteur élimine deux des dérivées à l'aide de deux intégrales transformées en équations aux dérivées partielles et compatibles avec la première. Le problème est ainsi ramené à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées ordinaires d'ordre $6(n-1)$. Cette méthode, appliquée au problème des trois corps, n'exigerait plus qu'une ou deux intégrales d'un système canonique du sixième ordre.

Dans la dernière Section, M. Allégret propose une réduction encore plus grande. Après avoir successivement annulé deux et trois constantes des intégrales des aires, il fait voir que ces équations deviennent compatibles avec l'équation fondamentale et admettent une solution singulière à trois constantes arbitraires, laquelle peut être déduite de l'intégration d'un système différentiel du quatrième ordre; et, quoique le nombre des constantes annulées soit supérieur à deux, le mouvement conserve toute sa généralité, pourvu qu'on ajoute à la fonction des forces certains termes convenables.

PEPIN. (le P.) — *Sur certains nombres complexes compris dans la formule* $a+b\sqrt{-c}$. (66 p.)

Euler, pour résoudre certaines équations indéterminées, a introduit des nombres complexes de la forme $a+b\sqrt{-c}$, mais sans démontrer que les solutions obtenues par ce moyen étaient les seules : Gauss a donné la théorie rigoureuse des nombres complexes de la forme $a+b\sqrt{-1}$; enfin Lejeune-Dirichlet a considéré les nombres complexes de la forme $a+b\sqrt{-5}$ et $a+b\sqrt{-7}$. Dans la première partie de l'important Mémoire que nous analysons, l'auteur s'occupe en général des nombres complexes compris dans la formule $a+b\sqrt{-c}$, où a et b sont des entiers quelconques et où c est un nombre entier positif.

Nous citerons quelques théorèmes résumant les recherches de l'auteur.

En supposant que les formes quadratiques positives et impaires de déterminant $-c$ soient comprises dans une même classe $(c = 1, 2, 3, 4, 7)$, on a les trois propositions suivantes :

La manière la plus générale de résoudre l'équation

$$x^2 + cy^2 = z^m,$$

quand les nombres x, y et z doivent être entiers et premiers entre eux, et qu'en outre z doit être impair, est de poser

$$(p + q\sqrt{-c})^m = P + Q\sqrt{-c},$$

de prendre $x = \pm P$, $y = \pm Q$, $z = p^2 + cq^2$ et d'attribuer aux lettres p et q toutes les valeurs entières et premières entre elles, qui déterminent pour z des valeurs impaires.

Soient A, B, D des diviseurs impairs de la formule $x^2 + cy^2$, premiers entre eux deux à deux; pour obtenir toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + cy^2 = A^m B^{m_1} D^{m_2} \ldots$$

en nombres entiers et premiers entre eux, il suffit de poser

$$\pm x \pm y\sqrt{-c} = (a + a_1\sqrt{-c})^m (b + b_1\sqrt{-c})^{m_1} (d + d_1\sqrt{-c})^{m_2} \ldots,$$

de ramener le second membre à la forme $P + Q\sqrt{-c}$ en effectuant les calculs indiqués, puis de donner, dans les deux polynômes P et Q, aux lettres (a, a_1), (b, b_1), (d, d_1), ..., toutes les valeurs entières qui forment respectivement des représentations propres des nombres A, B, D, ... par la forme $x^2 + cy^2$.

Si l'on désigne par H un diviseur impair de la formule $x^2 + cy^2$, et par x, y, z des nombres entiers et premiers entre eux deux à deux, dont le dernier z doit être impair, toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + cy^2 = Hz^m$$

peuvent se déduire des formules

$$\pm x \pm y\sqrt{-c} = (a + b\sqrt{-c})(p + q\sqrt{-c})^m, \quad z = p^2 + cq^2,$$

en y combinant successivement chacune des représentations pro-

pres (a, b) du nombre H par la forme x^2+cy^2, avec toutes les valeurs entières et premières entre elles de p et q propres à donner des valeurs impaires à la formule p^2+cq^2.

Supposons maintenant que, pour le déterminant $-n$ (n entier positif), les formes quadratiques soient distribuées en divers genres dont chacun ne renferme qu'une classe; on aura les théorèmes suivants :

Toutes les solutions en nombres entiers et premiers entre eux de l'équation

$$x^2+ny^2=z^{2m+1},$$

dans laquelle z a une valeur impaire, se déduisent des équations

$$\pm x\pm y\sqrt{-n}=(p+q\sqrt{-n})^{2m+1},\quad z=p^2+nq^2,$$

en donnant aux lettres p et q, de toutes les manières possibles, des valeurs entières et premières entre elles.

Pour trouver toutes les solutions entières et premières entre elles de l'équation

$$(1)\qquad x^2+ny^2=z^{2m},$$

en supposant z impair, il faut d'abord chercher toutes les solutions de l'équation

$$(2)\qquad p^2+ny^2=z^2,$$

ou plutôt toutes les formules générales propres à les déterminer. Ces formules générales se déduisent des suivantes :

$$(3)\qquad z=af^2+bg^2,\quad p=af^2-bg^2,\quad q=2fg,\quad ab=n,$$

$$(4)\qquad z=\frac{af^2+bg^2}{2},\quad p=\frac{af^2-bg^2}{2},\quad q=fg,\quad ab=n,$$

en prenant pour a et b toutes les décompositions du nombre n en deux facteurs premiers entre eux pour les formules (3) et, pour les formules (4), en deux facteurs premiers entre eux, si n est de la forme $4l+1$, en deux facteurs dont le plus grand commun diviseur soit 2, si $n=8l$. Puis on obtiendra les valeurs de x et de y, au moyen de l'équation

$$\pm x\pm y\sqrt{-n}=(p+q\sqrt{-n})^m=\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-n},$$

en remplaçant dans les fonctions entières P, Q *les indéterminées* p *et* q *par les fonctions numériques déduites des formules* (3) *et* (4).

Enfin, relativement aux équations de la forme $ax^2 + cy^2 = z^m$, $a > 1$, $c > 1$, pourvu que le nombre des classes de formes quadratiques de déterminant $-ac$ soit égal au nombre des genres, le P. Pepin donne les théorèmes suivants :

Si l'exposant m *est pair, l'équation proposée n'admet aucune solution en nombres entiers et différents de zéro.*

Si m *est impair et si* z *doit être impair et premier avec le produit* ac, *toutes les solutions en nombres entiers et premiers entre eux sont exprimées d'une manière générale par les formules*

$$\pm x = p\left[(ap^2)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)}{1.2}(ap^2)^{\frac{m-3}{2}} cq^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}(ap^2)^{\frac{m-5}{2}}(cq^2)^2 - \ldots\right],$$

$$\pm y = q\left[m(ap^2)^{\frac{m-1}{2}} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(ap^2)^{\frac{m-3}{2}} cq^2 + \frac{m(m-1)\ldots(m-4)}{1.2\ldots5}(ap^2)^{\frac{m-5}{2}}(cq^2)^2 + \ldots\right],$$

$$z = ap^2 - cq^2,$$

où l'on désigne par p et q deux nombres entiers et premiers entre eux.

La deuxième Partie du Mémoire contient un très-grand nombre d'applications particulières à des équations de la forme

$$x^2 + cy^2 = z^3,$$

et l'examen de quelques équations impossibles de la forme

$$x^3 + y^3 = az^3.$$

LAURENT (H.). — *Mémoire sur les fonctions de Legendre.* (26 p.)

Partant du théorème de Cauchy, sur la valeur de la $n^{\text{ième}}$ dérivée d'une fonction, l'auteur déduit les diverses propriétés des

fonctions X^n des deux formules suivantes :

$$X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz}{z^{n+1}\sqrt{1 - 2zx + z^2}},$$

$$X_n = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{1}{2^n} \int \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}},$$

l'intégration étant effectuée, pour le premier cas autour de l'origine, pour le second autour du point x.

En passant, l'auteur rencontre la formule déjà connue

$$X_0 Z_0 + 3 X_1 Z_1 + \ldots + (2n+1) X_n Z_n = \frac{n+1}{z-x} (Z_{n+1} X_n - X_{n+1} Z_n),$$

où Z_n représente en général ce que devient X_n quand on y remplace x par z, et en déduit la suivante :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n dz}{z - x}$$
$$= 2 X_n \left(\log \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{X_0 X_1} + \frac{1}{2 X_1 X_2} + \ldots + \frac{1}{n X_{n-1} X_n} \right).$$

Cette dernière formule est à son tour la source de plusieurs développements intéressants : la fonction

$$\int_{-1}^{+1} \frac{Z_n dz}{z - x}$$

est l'objet d'une étude particulière.

Guieysse (P.). — *De la propagation des marées dans les rivières.* (52 p.)

Traduit et extrait des *Tides and Waves* de M. Airy, Astronome Royal d'Angleterre. J. T.

MÉLANGES.

APPLICATION DES EXPRESSIONS COMPLEXES IMAGINAIRES A LA FORMATION DE CERTAINS SYSTÈMES COMPLÈTEMENT INTÉGRABLES D'ÉQUATIONS CANONIQUES ET D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. V. IMCHENETSKY,

Professeur à l'Université de Kharkof.

Une équation

$$(1) \qquad \varphi(z, z') = c,$$

entre deux variables z, z' et une constante arbitraire c, prend la forme

$$(2) \qquad H + Gi = a + bi,$$

lorsqu'on y substitue les valeurs

$$z = x + yi, \quad z' = x' + y'i, \quad c = a + bi,$$

où $i = \sqrt{-1}$.

Entre les dérivées partielles du premier ordre des fonctions H et G de x, y, x', y' existent des relations simples, en vertu desquelles, lorsqu'on établit une certaine correspondance entre x, y, x', y', il est facile de démontrer que l'expression (H, G), connue sous le nom de *parenthèse de Poisson*, est rendue identiquement nulle.

Cette circonstance indique l'existence d'un système canonique d'équations complétement intégrables au moyen des seules quadratures, et dans lesquelles H et G jouent le même rôle que l'intégrale des forces vives dans les équations de la Dynamique.

Lorsqu'on connait la moitié des intégrales d'un système canonique, l'intégration de ce système peut s'achever par diverses méthodes. La plus simple de ces méthodes, dans le cas donné, exige seulement la résolution algébrique de la seule équation $\varphi(z, z') = c$, par rapport à z ou à z', et le calcul de l'intégrale $\int z' dz$ ou $\int z dz'$ d'une fonction d'une seule variable; les autres

opérations consistent en des substitutions d'expressions complexes et en des différentiations.

En même temps que l'intégration complète d'un système canonique, on obtient toujours, comme résultat parallèle, la solution d'une ou de plusieurs équations aux dérivées partielles. Dans le cas donné, ces équations sont $H = a$, $G = b$, où l'on peut prendre deux quelconques des quatre variables x, y, x', y' pour variables indépendantes, et exprimer les deux autres au moyen des dérivées partielles d'une seule fonction de ces variables indépendantes.

Le problème exprimé par l'équation

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z')$$

peut toujours se ramener au problème de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles; mais ce dernier problème exige la résolution préalable du premier. Toutefois, si l'on remplace les variables z et z' par les expressions complexes $x + yi$, $x' + y'i$, on obtient deux équations aux différentielles ordinaires entre quatre variables, formant un système incomplet d'équations simultanées qui se réduit à un système de deux équations linéaires aux dérivées partielles. Relativement à ces dernières, on peut remarquer :

1° Qu'au nombre des équations différentielles ordinaires qui leur correspondent n'est pas comprise l'équation donnée $dz' = f(z, z')\,dz$;

2° Que les deux équations aux dérivées partielles forment un système *jacobien* ou système *fermé;*

3° Que, si l'on connaît l'intégrale générale $\varphi(z, z') = c$, ou $H + Gi = a + bi$ de l'équation $dz' = f(z, z')\,dz$, alors une fonction arbitraire de H et de G sera une solution du système fermé en question;

4° Si l'intégrale de l'équation $dz' = f(z, z')\,dz$ est inconnue, il est théoriquement possible de l'obtenir au moyen de l'intégration du système jacobien en question, ce qui constitue finalement un problème d'ordre plus élevé, et alors sa solution ne peut servir à la réalisation du but principal qu'en vertu d'une condition particulière.

Ces considérations, relatives à une seule équation différentielle, peuvent aisément s'étendre à un système de semblables équations.

§ I.

En faisant, dans le premier membre de l'équation (1), $z = x +$
il vient

$$\varphi(x + yi, z') = X + Yi,$$

avec les égalités

$$(3) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Si l'on fait ensuite $z' = x' + y' i$, on a

$$X = X' + Y' i, \quad Y = X'' + Y'' i,$$

avec les égalités

$$(4) \qquad \frac{\partial X'}{\partial x'} = \frac{\partial Y'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial X''}{\partial y'} = -\frac{\partial Y''}{\partial x'}$$

$$(5) \qquad \frac{\partial X'}{\partial y'} = -\frac{\partial Y'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial X''}{\partial x'} = \frac{\partial Y''}{\partial y'}.$$

En même temps les équations (3) prennent la forme

$$\frac{\partial X'}{\partial x} + \frac{\partial Y'}{\partial x} i = \frac{\partial X''}{\partial y} + \frac{\partial Y''}{\partial y} i, \quad \frac{\partial X'}{\partial y} + \frac{\partial Y'}{\partial y} i = -\frac{\partial X''}{\partial x} - \frac{\partial Y''}{\partial x} i$$

et elles se décomposent dans les suivantes :

$$(6) \qquad \frac{\partial X'}{\partial x} = \frac{\partial Y''}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial y} = -\frac{\partial Y''}{\partial x},$$

$$(7) \qquad \frac{\partial X'}{\partial y} = -\frac{\partial X''}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial x} = \frac{\partial Y''}{\partial y}.$$

Si l'on pose encore $c = a + bi$, l'équation (1) prend la forn

$$H + Gi = a + bi,$$

où l'on a

$$(8) \qquad H = X' - Y'', \quad G = Y' + X''.$$

Il est maintenant aisé de remarquer que les dérivées part des fonctions H et G, tant par rapport à x et y que par rapp x' et y', sont assujetties à des conditions semblables à (3). En

les équations (8) donnent

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial X'}{\partial x} - \frac{\partial Y''}{\partial x}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial Y'}{\partial y} + \frac{\partial X''}{\partial y}.$$

Or les seconds membres de ces équations sont égaux en vertu des équations (6) ; par suite,

(9)
$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial y}.$$

On tire de même de l'équation (8), en vertu de (7),

(10)
$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial G}{\partial x};$$

en vertu de (4),

(11)
$$\frac{\partial H}{\partial x'} = \frac{\partial G}{\partial y'},$$

et, en vertu de (5),

(12)
$$\frac{\partial H}{\partial y'} = -\frac{\partial G}{\partial x'}.$$

De ces équations découle immédiatement une conséquence importante pour notre objet, et consistant en ce que l'expression différentielle formée avec les dérivées partielles de H et de G, et connue sous le nom de *parenthèse de Poisson,* se réduit immédiatement à zéro, si l'on prend pour couples de variables correspondantes soit x et y', y et x', soit x et x', y' et y.

En effet, en multipliant l'équation (9) par l'équation (11) écrite sous la forme $\frac{\partial G}{\partial y'} = \frac{\partial H}{\partial x'}$, et faisant passer tous les termes dans le premier membre, il vient

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y} = 0.$$

On tire de même des équations (10) et (12)

$$-\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} = 0.$$

En ajoutant les deux dernières équations, on aura

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

égalité dont le premier membre est une parenthèse de Poisson, où l'on a fait correspondre les variables x et y', y et x'; nous représenterons d'après cela cette égalité d'une manière abrégée par

(13) $$(H, G) = 0.$$

On trouve absolument de la même manière, en vertu des équations (9) et (12),

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} + \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y} = 0,$$

et, en vertu des équations (10) et (11),

$$\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

et, en soustrayant la dernière équation de la précédente, on obtient l'égalité

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} = 0,$$

dont le premier membre est encore une parenthèse de Poisson, où l'on a fait correspondre les variables x et x', y' et y. Nous représenterons cette égalité, pour la distinguer de (13), par

(14) $$[H, G] = 0.$$

§ II.

En conservant la double notation pour les parenthèses de Poisson, établie dans le § I, formons les équations

$$(H, \psi) = 0, \quad [H, \chi] = 0, \quad (\omega, G) = 0, \quad [\varpi, G] = 0,$$

linéaires par rapport aux dérivées partielles des fonctions inconnues ψ, χ, ω, ϖ de x, y, x', y'.

Ayant écrit les systèmes d'équations différentielles ordinaires correspondants à ces équations et auxquels se ramène leur intégra-

tion, il est facile de se convaincre, en vertu des équations (9), (10) (11), (12), que les systèmes appartenant aux équations $(\mathrm{H}, \psi) = 0$, et $[\varpi, \mathrm{G}] = 0$, et ceux qui appartiennent aux équations $[\mathrm{H}, \chi] = 0$ et $(\omega, \mathrm{G}) = 0$, sont parfaitement identiques.

D'après cela, si l'on veut intégrer les équations précédentes, il suffira de considérer seulement deux de ces équations, différentes entre elles, par exemple

$$(\mathrm{H}, \psi) = 0, \quad \text{et} \quad (\omega, \mathrm{G}) = 0.$$

Mais la première de ces deux équations peut aussi s'écrire sous la forme $(\psi, \mathrm{H}) = 0$, et il suffit évidemment de considérer la marche de l'intégration d'une seule de ces équations; tout ce que l'on trouvera pour celle-là pourra s'appliquer à l'équation $(\omega, \mathrm{G}) = 0$, en y changeant H en G, et réciproquement.

A l'équation linéaire

$$(\psi, \mathrm{H}) = 0$$

correspond le système d'équations différentielles ordinaires

$$(15) \qquad \frac{dx}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}} = \frac{dy}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}} = -\frac{dx'}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}} = -\frac{dy'}{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}}.$$

Une intégrale de ce système est évidemment $\mathrm{H} = a$, et l'on démontre, au moyen de (13), qu'il admet aussi l'intégrale $\mathrm{G} = b$. Enfin la dernière intégrale, qui complète la solution, peut toujours s'obtenir par l'emploi de la théorie du multiplicateur généralisée par Jacobi, en se fondant sur le théorème suivant [1] :

Étant donné un système d'équations différentielles

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = \mathrm{X} : \mathrm{X}_1 : \mathrm{X}_2 : \ldots : \mathrm{X}_n,$$

si l'on connaît $n - 1$ de ses intégrales

$$f_2 = \alpha_2, \quad f_3 = \alpha_3, \quad \ldots, \quad f_n = \alpha_n,$$

et aussi la solution M *de l'équation différentielle*

$$(\alpha) \qquad \mathrm{X}\frac{d \log \mathrm{M}}{dx} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{X}_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \mathrm{X}_n}{\partial x_n} = 0,$$

---

(1) *Vorlesungen über Dynamik*, p. 112.

alors, en ramenant, au moyen de ces intégrales, le système proposé à l'équation différentielle

$$(\beta) \qquad X\,dx_1 - X_1\,dx = 0$$

entre les deux variables x et x_1, cette équation aura pour facteur d'intégration

$$(\gamma) \qquad \frac{M}{\sum \pm \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\cdots\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}.$$

Il faut remarquer que le système (15) est canonique; par suite, pour ce système, tous les termes de l'équation (α), à l'exception du premier, se détruisent, quelle que soit l'équation du système (15) que l'on ait prise pour (β); par suite, M est ici une quantité constante, et l'on pourra la supposer égale à l'unité.

Pour l'équation (β), ce qu'il y a de plus simple, c'est de prendre l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial x'}dx - \frac{\partial H}{\partial y'}dy = 0,$$

ou l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial x}dx' - \frac{\partial H}{\partial y}dy' = 0.$$

L'intégration de ces équations, à l'aide des facteurs d'intégration donnés par la formule (γ) et pour $M = 1$, se ramène aux quadratures

$$\int \frac{\frac{\partial H}{\partial x'}dx - \frac{\partial H}{\partial y'}dy}{\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x'}} = \text{const.},$$

et

$$\int \frac{\frac{\partial H}{\partial x}dx' - \frac{\partial H}{\partial y}dy'}{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x}} = \text{const.}$$

Mais, avant de calculer ces quadratures, il faut, sous le signe $\int$, éliminer de la première x' et y', et de la seconde x et y, à l'aide des équations $H = a$ et $G = b$. Cela exige, à ce qu'il semble, la résolution de ces deux équations à deux inconnues; mais, ces

équations étant équivalentes à l'équation unique

$$H + Gi = a + bi, \quad \text{ou} \quad \varphi(z, z') = c,$$

il suffira de tirer de cette dernière la valeur de z' ou celle de z, et, après avoir remplacé de nouveau z, z' et c par leurs expressions complexes, de décomposer le résultat en deux équations, pour obtenir les valeurs de x', y' en x, y, ou *vice versa*.

Il est évident que, pour tout autre choix de la dernière équation à intégrer du système (15), on n'éviterait pas la résolution algébrique de deux équations $H = a$, $G = b$ à deux inconnues.

§ III.

On peut encore achever autrement l'intégration du système (15). Introduisons dans ces équations une nouvelle variable t, en égalant sa différentielle à chacun des rapports (15). Nous aurons de cette manière

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y'}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x'}, \\ \frac{dx'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{dy'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{aligned} \right.$$

Nous connaissons deux intégrales de ces équations, H et G, satisfaisant à l'identité

$$(H, G) = 0;$$

par suite, en vertu d'un théorème de M. Liouville ([1]), les expressions différentielles

$$y'\,dx + x'\,dy, \quad \text{et} \quad y\,dx' + x\,dy'$$

deviennent des différentielles exactes, si l'on élimine x' et y' de la première, x et y de la seconde, au moyen des équations $H = a$ et $G = b$, ce qui, d'après le § II, n'exige que la résolution algébrique d'une seule équation $\varphi(z, z') = c$.

Mais, pour obtenir les intégrales des deux expressions différentielles précédentes par une voie encore plus simple, supposons que

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, t. XX, 1855, p. 137.

les valeurs de z' et de z, tirées de l'équation $\varphi(z, z') = c$, soient

$$z' = \psi(z, c), \quad \text{et} \quad z = \chi(z', c).$$

Multipliant la première par dz, la seconde par dz' et intégrant, on trouve

$$\int z'\,dz = \int \psi(z, c)\,dz = \mathrm{Z}, \quad \int z\,dz' = \int \chi(z', c)\,dz' = \mathrm{Z}'.$$

On peut maintenant démontrer que les quadratures cherchées

$$\int (y'\,dx + x'\,dy) = u, \quad \text{et} \quad \int (y\,dx' + x\,dy') = v$$

sont les coefficients de i dans les résultats de la substitution des expressions complexes de z, z', c dans les fonctions Z et Z'. En effet,

$$\mathrm{Z} = \int (x' + iy')(dx + i\,dy) = \int (x'\,dx - y'\,dy) + i\int (y'\,dx + x'\,dy),$$
$$\mathrm{Z}' = \int (x + iy)(dx' + i\,dy') = \int (x\,dx' - y\,dy') + i\int (y\,dx' + x\,dy').$$

Ayant trouvé une des fonctions u, v, on aura, d'après le théorème de M. Liouville que nous venons de citer, une troisième intégrale du système (16) sous la forme de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \text{const.}, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v}{\partial b} = \text{const.}$$

Ces intégrales doivent être complétement identiques avec celles qu'on a obtenues au § II, ce qu'il suffit de démontrer pour l'une d'elles, par exemple, pour la première. On a

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \int \left(\frac{\partial y'}{\partial b}\,dx + \frac{\partial x'}{\partial b}\,dy \right).$$

Mais, en considérant x' et y' comme des fonctions implicites de x, y, a, b, déterminées au moyen des équations $\mathrm{H} = a$ et $\mathrm{G} = b$, et différentiant ces dernières partiellement par rapport à b, on trouve

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial b} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial b} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial b} = 1,$$

d'où

$$\frac{\partial x'}{\partial b} = -\frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'} - \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}}, \quad \frac{\partial y'}{\partial b} = \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'} - \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}},$$

et en substituant ces valeurs, on trouve une expression de l'intégrale

$$\frac{\partial u}{\partial b} = \int \frac{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}dx - \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}dy}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'} - \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}} = \text{const.},$$

parfaitement identique avec celle qu'on a obtenue au § II.

L'introduction dans le système (15) d'une nouvelle variable t, au moyen de sa différentielle, augmente d'une unité le nombre des intégrales des équations ainsi transformées; cette nouvelle intégrale, la seule qui renferme t, s'exprime par l'une ou l'autre des équations

$$\frac{\partial u}{\partial a} = t + \text{const.}, \quad \frac{\partial v}{\partial a} = \text{const.} - t,$$

que l'on peut encore ramener à la forme suivante :

$$t + \text{const.} = \int\left(\frac{\partial y'}{\partial a}dx + \frac{\partial x'}{\partial a}dy\right) = \int \frac{\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'}dy - \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}dx}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'} - \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}},$$

$$\text{const.} - t = \int\left(\frac{\partial y}{\partial a}dx' + \frac{\partial x}{\partial a}dy'\right) = \int \frac{\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}dy' - \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}dx'}{\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial x}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} - \dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}},$$

où l'on devra encore, avant d'intégrer, éliminer, sous le signe $\int$, x' et y' dans la première formule, x et y dans la seconde, au moyen de l'équation $\mathrm{H} + \mathrm{G}i = a + bi$.

§ IV.

L'avantage que présente la méthode d'intégration exposée au § III sur celle du § II consiste en ce que, en intégrant le système (16), on résout en même temps un autre problème de Calcul intégral. Il est clair, en effet, que la solution commune des deux équations aux dérivées partielles $\mathrm{H} = a$ et $\mathrm{G} = b$, ainsi que l'intégrale complète de chacune d'elles en particulier, sera

$$u + \text{const.}, \quad \text{ou} \quad v + \text{const.},$$

en ayant soin, si l'on prend pour variables indépendantes x et y, de poser $y' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $x' = \frac{\partial u}{\partial y}$, ou *vice versa*, si l'on prend pour variables indépendantes x' et y', de poser $y = \frac{\partial v}{\partial x'}$, $x = \frac{\partial v}{\partial y'}$.

Mais, dans les équations $H = a$ et $G = b$, on peut aussi prendre pour variables indépendantes deux quelconques des quatre variables x, y, x', y', en exprimant en même temps, de la manière connue, les deux autres variables au moyen des dérivées partielles du premier ordre d'une seule et même fonction, prises par rapport à ces variables indépendantes. Cette fonction inconnue peut toujours s'obtenir au moyen d'une quadrature, et, celle-ci étant complétée par la simple addition d'une constante arbitraire, on aura la solution commune des deux équations simultanées $H = a$ et $G = b$, et l'intégrale complète de chacune d'elles en particulier.

Les diverses combinaisons deux à deux des quatre variables x, y, x', y' présentent six cas, dont deux ont été déjà considérés, de sorte qu'il reste les quatre cas suivants :

1° En prenant pour variables indépendantes x et x', on pourra poser

$$y = \frac{\partial P}{\partial x'}, \quad y' = -\frac{\partial P}{\partial x}.$$

En effet, si, dans les équations $H = a$ et $G = b$, on regarde y et y' comme des fonctions de x et x', on trouve

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}}, \quad \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}},$$

et l'on en tire, en vertu de l'égalité (13),

$$\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial x'} = -\frac{(H, G)}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}} = 0;$$

par conséquent,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial x'}dx' = -y'\,dx + y\,dx',$$

et

$$P = \int(-y'\,dx + y\,dx') + \text{const.}$$

2° En prenant pour variables indépendantes x et y', on pourra poser

$$x' = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial Q}{\partial y'}.$$

Si l'on considère maintenant, dans les équations $H = a$ et $G = b$, x' et y comme des fonctions de x et y', il vient

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}}, \quad \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}},$$

d'où l'on tire, en vertu de l'égalité (14),

$$\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{[H, G]}{\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial y}} = 0;$$

par conséquent,

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x}dx + \frac{\partial Q}{\partial y'}dy' = x'\,dx + y\,dy',$$

et

$$Q = \int (x'\,dx + y\,dy') + \text{const.}$$

3° Quand on prend pour variables indépendantes y et y', il faut alors poser, pareillement à ce qu'on a fait dans le cas 1°,

$$x = \frac{\partial R}{\partial y'}, \quad x' = -\frac{\partial R}{\partial y}.$$

En effet, on trouve, absolument de la même manière que dans le cas 1°,

$$\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{(H, G)}{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x'} - \frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial G}{\partial x}} = 0,$$

et partant

$$R = \int (x\,dy' - x'\,dy) + \text{const.}$$

4° Enfin, le cas où l'on prend pour variables indépendantes y et x' est semblable au cas 2°; on posera alors

$$x = \frac{\partial S}{\partial x'}, \quad y' = \frac{\partial S}{\partial y}.$$

Comme on tire des équations $H = a$, $G = b$,

$$\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y'}{\partial x'} = - \frac{[H, G]}{\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y'} - \frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial G}{\partial x}} = 0,$$

on a, par suite,

$$S = \int (x\,dx' + y'\,dy) + \text{const.}$$

Les fonctions P, Q, R, S ont, par rapport au système canonique du § III, la même importance que les fonctions u et v; c'est-à-dire que, au moyen des dérivées partielles de chacune de ces quatre fonctions par rapport aux constantes arbitraires a et b, on peut exprimer les deux intégrales qui constituent, avec $H = a$ et $G = b$, le système complet des intégrales des équations canoniques considérées (16).

Pour se convaincre que cette propriété appartient, par exemple, à la fonction P, en désignant a ou b par α, prenons la dérivée partielle $\frac{\partial P}{\partial \alpha}$; substituons-y H à la place de a et G à la place de b; enfin, prenons la dérivée totale par rapport à t du résultat de la substitution; ce qui donne

$$\frac{d.\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{dt} = \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x'}\frac{dx'}{dt} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial H}\frac{dH}{dt} + \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial G}\frac{dG}{dt}.$$

Or, H et G sont des intégrales, et par suite $\frac{dH}{dt} = 0$ et $\frac{dG}{dt} = 0$. De plus,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -y', \quad \frac{\partial P}{\partial x'} = y;$$

donc

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x} = -\frac{\partial y'}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial \alpha\,\partial x'} = \frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Enfin

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y'}, \quad \frac{dx'}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y};$$

par conséquent

$$\frac{d.\frac{\partial P}{\partial \alpha}}{dt} = -\left(\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right).$$

L'expression entre parenthèses dans le second membre de la seconde égalité représente le résultat de la différentiation partielle, par rapport à α, de la première des deux équations $H = a$ et $G = b$, dans laquelle on a substitué à y et à y' leurs valeurs tirées de ces équations. Par suite, si $\alpha = b$, on a $d.\frac{\partial P}{\partial b} = 0$; si $\alpha = a$, alors $d.\frac{\partial P}{\partial a} = -dt$.

En intégrant, on tire de là les deux intégrales cherchées du système canonique,

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \text{const.}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial a} = \text{const.} - t.$$

Le même mode de démonstration s'appliquerait exactement aux fonctions Q, R, S.

Nous ferons encore la remarque suivante. Dans le § III, nous avons trouvé les formules

$$Z = \int z'\, dz, \quad Z' = \int z\, dz',$$

où les valeurs de z et de z' étaient tirées de l'équation $\varphi(z, z') = c$; en y substituant les expressions complexes de z, z', c, et posant

$$u = \int (y'\, dx + x'\, dy), \quad v = \int (y\, dx' + z\, dy'),$$
$$u_1 = \int (x'\, dx - y'\, dy), \quad v_1 = \int (x\, dx' - y\, dy'),$$

nous aurons

$$Z = u_1 + ui, \quad Z' = v_1 + vi.$$

Les fonctions u_1 et v_1 jouissent, relativement au système canonique considéré (16), de la même propriété que les fonctions u, v, P, Q, R, S; en sorte que, connaissant les deux intégrales $H = a$, $G = b$ de ce système, on peut obtenir les deux intégrales restantes au moyen, par exemple, de la fonction u_1, sous la forme des équations

$$\frac{\partial u_1}{\partial a} = \text{const.}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial b} = \text{const.} - t.$$

Il est superflu d'en donner la démonstration, qui se ferait par un calcul presque littéralement identique à celui que nous avons donné pour la fonction P.

Ajoutons à cela que, en considérant, dans les équations $H = a$ et $G = b$, x et y comme les variables indépendantes, et posant $x' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $y' = -\frac{\partial u_1}{\partial y}$, on trouvera que $u_1 +$ const. représentera l'intégrale complète de chacune des deux équations précédentes aux dérivées partielles, et la solution commune de leur système.

Nous avons vu que u, v, u_1, v_1 s'obtiennent au moyen des intégrales $Z = \int z'\,dz$ et $Z' = \int z\,dz'$ de fonctions d'une seule variable, tandis que la détermination de P, Q, R, S exige le calcul de quadratures dépendant de deux variables. En conséquence, il n'est pas inutile de remarquer que le calcul de ces dernières fonctions se ramène au calcul des premières, en vertu des formules suivantes, faciles à vérifier :

$$\begin{aligned}
dP - dv &= -d(xy'), & dP + du &= d(x'y),\\
dQ + dv_1 &= d(xx'), & dQ - du_1 &= d(yy'),\\
dR - dv &= -d(x'y), & dR + du &= d(xy'),\\
dS - dv_1 &= d(yy'), & dS + du_1 &= d(xx'),
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, par l'intégration,

$$\begin{aligned}
P &= v - xy' = x'y - u,\\
Q &= xx' - v_1 = u_1 + yy',\\
R &= v - x'y = xy' - u,\\
S &= v_1 + yy' = xx' - u_1,
\end{aligned}$$

en omettant, pour plus de simplicité, les constantes arbitraires.

§ V.

Prenons maintenant une équation différentielle de la forme générale

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z').$$

Remplaçons les variables z, z' par leurs expressions complexes $x + yi$, $x' + y'i$, ce qui donne

$$f(x + yi, x' + y'i) = X + Yi,$$

en désignant par X, Y des fonctions de x, y, x', y', assujetties nécessairement (§ I) aux conditions

$$(c)\quad \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y},\quad \frac{\partial X}{\partial y} = -\frac{\partial Y}{\partial x},\quad \frac{\partial X}{\partial x'} = \frac{\partial Y}{\partial y'},\quad \frac{\partial X}{\partial y'} = -\frac{\partial Y}{\partial x'}.$$

L'équation différentielle précédente prendra la forme

$$dx' + i\,dy' = X\,dx - Y\,dy + i(Y\,dx + X\,dy),$$

et se décomposera dans les deux suivantes :

$$dx' = X\,dx - Y\,dy,\quad dy' = Y\,dx + X\,dy.$$

Ces équations forment un système *incomplet* d'équations différentielles, dont l'intégration peut se ramener à l'intégration d'équations linéaires simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Une équation de la forme

$$U = \text{const.},$$

où U est une fonction de x, y, x', y', sera une équation intégrale relativement aux équations précédentes, et la fonction U en sera une intégrale, si sa différentielle totale s'annule identiquement en vertu de ces mêmes équations. Or on a

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial x'}dx' + \frac{\partial U}{\partial y'}dy',$$

et, après la substitution des valeurs de dx' et de dy' tirées des équations données, il vient

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + X\frac{\partial U}{\partial x'} + Y\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - Y\frac{\partial U}{\partial x'} + X\frac{\partial U}{\partial y'}\right)dy.$$

On voit par là que, dx et dy étant arbitraires, on aura

$$dU = 0,$$

si U satisfait aux deux équations simultanées

$$\frac{\partial U}{\partial x} + X\frac{\partial U}{\partial x'} + Y\frac{\partial U}{\partial y'} = 0,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} - Y\frac{\partial U}{\partial x'} + X\frac{\partial U}{\partial y'} = 0.$$

Il est facile de s'assurer que ces deux équations forment ce qu'on appelle un *système jacobien* ou *système fermé*, jouissant, comme on sait, de cette propriété que toute intégrale de l'une d'elles dans le résultat de la substitution dans le premier membre de l'autre donne une intégrale de la première équation.

Pour le faire voir, introduisons les symboles A et B pour désigner respectivement les opérations

$$\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{X}\frac{\partial}{\partial x'} + \mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial y'}, \quad \frac{\partial}{\partial y} - \mathrm{Y}\frac{\partial}{\partial x'} + \mathrm{X}\frac{\partial}{\partial y'},$$

de sorte que les équations données seront représentées par

$$\mathrm{A(U)} = 0, \quad \mathrm{B(U)} = 0;$$

il suffira de démontrer l'identité symbolique de l'égalité

$$\mathrm{B[A(U)]} = \mathrm{A[B(U)]},$$

pour une valeur arbitraire de la fonction U. Mais pour cela il faut et il suffit que les conditions

$$\mathrm{B(X)} = \mathrm{A}(-\mathrm{Y}), \quad \mathrm{B(Y)} = \mathrm{A(X)}$$

soient satisfaites. En introduisant de nouveau, à la place des symboles A et B, leurs valeurs, ces conditions prennent la forme

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x} + \mathrm{X}\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y'} + \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x'}\right) - \mathrm{Y}\left(\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y'}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x} + \mathrm{X}\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial y'} - \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial x'}\right) - \mathrm{Y}\left(\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathrm{X}}{\partial y'}\right) = 0,$$

et, en vertu des conditions (c) auxquelles sont assujettis X et Y, il est clair que les dernières conditions sont aussi remplies.

L'équation $\mathrm{A(V)} = 0$ a pour intégrale y, et soit α une autre de ses intégrales, différente de y; α ne sera pas exprimable au moyen de y seul.

En faisant successivement $\mathrm{V} = y, \alpha$, dans l'expression $\mathrm{B(V)}$, on trouvera

$$\mathrm{B}(y) = 1, \quad \mathrm{B}(\alpha) = \beta.$$

Si $\beta = 0$, α sera alors la solution commune cherchée des équations $\mathrm{A(V)} = 0$ et $\mathrm{B(V)} = 0$.

Si β s'exprime au moyen des seules quantités y et α, de sorte que $= f(y, \alpha)$, en supposant alors que

$$V = F(y, \alpha)$$

›it la solution commune cherchée, on voit que la fonction F devra ıtisfaire à la condition

$$B(F) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} f(y, \alpha) = o.$$

:elle-ci conduit à l'intégration de l'équation

$$\frac{dy}{1} = \frac{d\alpha}{f(y, \alpha)}, \quad \text{ou} \quad f(y, \alpha)\, dy - d\alpha = o,$$

t il est clair que l'intégrale de celle-ci s'obtiendra immédiatement ı moyen des quadratures, si β s'exprime au moyen de y seul ns α, ou au moyen de α seul sans y, ou enfin se réduit à une ıleur constante quelconque.

Si β ne peut s'exprimer au moyen des seules variables y et α, ›rs, en posant $V = \beta$ dans l'expression $B(V)$, il viendra

$$B(\beta) = \gamma.$$

est clair que β sera la solution commune cherchée, si $\gamma = o$; ns le cas contraire, γ sera une constante, ou devra nécessaire- :nt s'exprimer au moyen de y, α et β seulement. En effet, si γ ne xprimait pas en y, α, β, on aurait alors, outre ces trois intégrales, e quatrième intégrale, distincte des précédentes, de l'équation $V) = o$, ou ce qui revient au même, du système des équations

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{o} = \frac{dx'}{X} = \frac{dy'}{Y},$$

ıdis que ces dernières ne peuvent admettre que trois intégrales tinctes.

Ainsi, si $\gamma = f(y, \alpha, \beta)$, en supposant alors que la solution nmune cherchée soit

$$V = F(y, \alpha, \beta),$$

on parviendra à la condition nécessaire

$$\mathrm{B}(\mathrm{F}) = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \alpha}\beta + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \beta}\mathrm{f}(y, \alpha, \beta) = 0,$$

conduisant à l'intégration du système d'équations

$$\frac{dy}{1} = \frac{d\alpha}{\beta} = \frac{d\beta}{\mathrm{f}(y, \alpha, \beta)},$$

lequel se ramène à son tour à l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d^2\alpha}{dy^2} = \mathrm{f}\left(y, \alpha, \frac{d\alpha}{dy}\right).$$

La connaissance de l'une des deux intégrales premières de cette équation suffit pour la détermination de la solution commune des équations $\mathrm{A}(\mathrm{V}) = 0$ et $\mathrm{B}(\mathrm{V}) = 0$.

Il est évident que, si l'expression de γ est indépendante d'une ou de deux ou de trois des variables y, α, β, il en résultera dans l'intégration de l'équation précédente une plus ou moins grande simplification.

La résolution des équations $\mathrm{A}(\mathrm{U}) = 0$, $\mathrm{B}(\mathrm{U}) = 0$ se fera immédiatement, si l'on a trouvé préalablement l'intégrale générale

$$\varphi(z, z') = c$$

de l'équation différentielle

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z').$$

Dans ce cas, on aura l'égalité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + f(z, z')\frac{\partial \varphi}{\partial z'} = 0.$$

En remplaçant z et z' par leurs expressions complexes, il viendra

$$f(x + yi, x' + y'i) = \mathrm{X} + \mathrm{Y}i, \quad \varphi(x + yi, x' + y'i) = \mathrm{H} + \mathrm{G}i,$$

avec les conditions (c) pour X et Y, et les conditions (9) à (12) pour H et G.

En vertu de ces dernières, on a

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{H} + \mathrm{G}i) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y}i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}i,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'}(\mathrm{H} + \mathrm{G}i) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}i = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x'} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial y'}i = \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y'} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x'}i.$$

Par conséquent, l'équation précédente, exprimée à l'aide des dérivées partielles de φ, peut s'exprimer à l'aide des dérivées partielles de H seul ou de G seul. En substituant également les expressions complexes dans $f(z, z')$, on trouvera ainsi les deux égalités

$$\mathrm{A}(\mathrm{H}) - i\mathrm{B}(\mathrm{H}) = 0, \quad \mathrm{B}(\mathrm{G}) + i\mathrm{A}(\mathrm{G}) = 0,$$

lesquelles se décomposent dans les quatre suivantes :

$$\mathrm{A}(\mathrm{H}) = 0, \quad \mathrm{B}(\mathrm{H}) = 0, \quad \mathrm{B}(\mathrm{G}) = 0, \quad \mathrm{A}(\mathrm{G}) = 0;$$

ce qui démontre que les équations linéaires $\mathrm{A}(\mathrm{U}) = 0$ et $\mathrm{B}(\mathrm{U}) = 0$, étant satisfaites par les valeurs H et G de U, le seront aussi par la valeur $\mathrm{U} = \Pi(\mathrm{H}, \mathrm{G})$, Π désignant une fonction arbitraire.

La question de savoir à quelles conditions la solution commune U des deux équations $\mathrm{A}(\mathrm{U}) = 0$, $\mathrm{B}(\mathrm{U}) = 0$ peut représenter une des parties composantes de l'intégrale *inconnue* $\varphi(z, z') = \mathrm{H} + \mathrm{G}i$, peut se résoudre de la manière suivante.

Si, par exemple, $\mathrm{U} = \mathrm{H}$, il devra exister une fonction V, représentant la seconde composante G de l'intégrale φ, de sorte que l'on devra avoir $\mathrm{V} = \mathrm{G}$. Il s'ensuit de là que

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}, \quad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'} = -\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}.$$

Mais on a

$$d\mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}dx + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y}dy + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x'}dx' + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial y'}dy',$$

et, en vertu des égalités précédentes, il viendra

$$d\mathrm{V} = -\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}dx + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}dy - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y'}dx' + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x'}dy';$$

par conséquent, V se déterminera au moyen de la fonction connue U par une quadrature, si les conditions d'intégrabilité

$$\alpha = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \qquad \beta = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x'} - \frac{\partial^2 U}{\partial y' \partial x} = 0,$$

$$\gamma = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial y'} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial x'} = 0, \quad \delta = \frac{\partial^2 U}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y'^2} = 0$$

sont satisfaites.

Or des équations

$$A(U) = \frac{\partial U}{\partial x} + X\frac{\partial U}{\partial x'} + Y\frac{\partial U}{\partial y'} = 0,$$

$$B(U) = \frac{\partial U}{\partial y} - Y\frac{\partial U}{\partial x'} + X\frac{\partial U}{\partial y'} = 0,$$

en ayant égard aux conditions (c), on tire sans peine les égalités suivantes :

$$\frac{\partial A(U)}{\partial x} + \frac{\partial B(U)}{\partial y} = \alpha + X\gamma - Y\beta = 0,$$

$$\frac{\partial A(U)}{\partial x'} + \frac{\partial B(U)}{\partial y'} = \gamma + X\delta = 0,$$

$$\frac{\partial B(U)}{\partial x'} - \frac{\partial A(U)}{\partial y'} = \beta - Y\delta = 0,$$

lesquelles démontrent que, si l'une des quatre quantités α, β, γ, δ s'annule, il en sera de même aussi des trois autres.

Par conséquent, si la solution commune U des deux équations $A(U) = 0$, $B(U) = 0$ satisfait à l'une des quatre conditions

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 0,$$

on pourra alors, par son moyen, calculer l'intégrale générale

$$\varphi(z, z') = c$$

de l'équation

$$\frac{dz'}{dz} = f(z, z').$$

En introduisant les expressions complexes des variables dans un système d'équations différentielles, il est facile d'obtenir des trans-

formations et des conséquences semblables aux précédentes; mais nous ne les développerons pas, parce qu'elles sont des applications particulières des §§ I-IV. Une de ces applications, qui s'était présentée à moi avant le problème général, a été communiquée par moi à la rédaction du *Journal de la Société Mathématique de Moscou*, au commencement de cette année.

Kharkof, 1876.

SUR LE PLAN OSCULATEUR AUX CUBIQUES GAUCHES;

PAR M. JULES TANNERY.

Dans une thèse récemment soutenue devant la Faculté des Sciences de Paris, M. Appell a étudié, après M. Chasles, un système de pôles et de plans polaires relatif aux cubiques gauches. Le travail de M. Appell est fondé sur la considération d'une relation involutive entre trois valeurs de la variable au moyen de laquelle peuvent être exprimées les coordonnées d'un point quelconque de la courbe : l'auteur parvient ainsi, d'une façon très-élégante, et presque sans calculs, à la série de propositions qu'il avait en vue. Il était aisé de prévoir, après la lecture de sa thèse, que l'équation même du plan osculateur devait naturellement conduire à la même série de propositions; c'est, en effet, ce que je vais montrer, d'autant qu'on parvient ainsi à quelques vérités nouvelles.

Je ferai d'abord les remarques suivantes : si

$$x = P, \quad y = P_1, \quad z = P_2, \quad u = P_3$$

sont les équations d'une courbe unicursale quelconque, P, P_1, P_2, P_3 étant des polynômes entiers, homogènes, du degré n en t, s, la tangente au point (t, s) joindra les deux points dont les coordonnées sont

$$P, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3,$$

d'une part, et

$$\frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial P_1}{\partial t}, \quad \frac{\partial P_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial P_3}{\partial t},$$

de l'autre; ou, si l'on veut, les deux points dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial P}{\partial t},\quad \frac{\partial P_1}{\partial t},\quad \frac{\partial P_2}{\partial t},\quad \frac{\partial P_3}{\partial t},$$

d'une part, et

$$\frac{\partial P}{\partial s},\quad \frac{\partial P_1}{\partial s},\quad \frac{\partial P_2}{\partial s},\quad \frac{\partial P_3}{\partial s},$$

de l'autre. Le plan osculateur au même point passera par les trois points dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{array}{llll} P, & P_1, & P_2, & P_3; \\ \dfrac{\partial P}{\partial t}, & \dfrac{\partial P_1}{\partial t}, & \dfrac{\partial P_2}{\partial t}, & \dfrac{\partial P_3}{\partial t}; \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}; \end{array}$$

ou, si l'on veut, par les trois points dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{array}{llll} \dfrac{\partial^2 P}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial t^2}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial t^2}; \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial t\,\partial s}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial t\,\partial s}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial t\,\partial s}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial t\,\partial s}; \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial s^2}, & \dfrac{\partial^2 P_1}{\partial s^2}, & \dfrac{\partial^2 P_2}{\partial s^2}, & \dfrac{\partial^2 P_3}{\partial s^2}. \end{array}$$

Cela posé, si l'on a affaire à une cubique gauche, on prendra

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} P &= at^3 + 3\,bt^2s + 3\,cts^2 + ds^3, \\ P_1 &= a't^3 + 3\,b't^2s + 3\,c'ts^2 + d's^3, \\ P_2 &= a''t^3 + 3\,b''t^2s + 3\,c''ts^2 + d''s^3, \\ P_3 &= a'''t^3 + 3\,b'''t^2s + 3\,c'''ts^2 + d'''s^3; \end{aligned} \right.$$

et l'équation du plan osculateur au point (t, s) sera

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x & at + bs & bt + cs & ct + ds \\ y & a't + b's & b't + c's & c't + d's \\ z & a''t + b''s & b''t + c''s & c''t + d''s \\ u & a'''t + b'''s & b'''t + c'''s & c'''t + d'''s \end{vmatrix} = 0.$$

: équation montre déjà que par un point quelconque de l'es- peut mener trois points osculateurs à la cubique; les coor- s de ces trois points seront déterminées par les trois valeurs : l'on tirera de cette équation, en y regardant x, y, z, u données.

: équation développée et ordonnée peut s'écrire

$$Xs^3 - Yts^2 + Zt^2s - Ut^3 = 0,$$

nt

$$\left\{\begin{aligned} X &= Ax + A'y + A''z + A'''u,\\ Y &= Bx + B'y + B''z + B'''u,\\ Z &= Cx + C'y + C''z + C'''u,\\ U &= Dx + D'y + D''z + D'''u, \end{aligned}\right.$$

.. étant les mineurs relatifs à $a, a', \ldots$ du déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ a' & b' & c' & d'\\ a'' & b'' & c'' & d''\\ a''' & b''' & c''' & d''' \end{vmatrix}.$$

ıation (3) peut aussi être considérée comme étant l'équation osculateur au point (t, s), dans le système de coordonnées iques X, Y, Z, U : dans ce système, les équations de la gauche prennent la forme simple

$$X = t^3, \quad Y = 3t^2s, \quad Z = 3ts^2, \quad U = s^3;$$

ı écrivant que l'équation (3) en $\frac{t}{s}$ a deux racines égales, on ra l'équation de la surface développable du quatrième ordre cubique gauche est l'arête de rebroussement.

ıant à l'équation (2) du plan osculateur au point (t, s) de ue et désignant par x', y', z', u' les coordonnées de ce point,

on la mettra successivement sous les deux formes suivantes :

$$\begin{vmatrix} x & x' & at+bs & bt+cs \\ y & y' & a't+b's & b't+c's \\ z & z' & a''t+b''s & b''t+c''s \\ u & u' & a'''t+b'''s & b'''t+c'''s \end{vmatrix} = 0,$$

$$s \begin{vmatrix} x & x' & b & c \\ y & y' & b' & c' \\ z & z' & b'' & c'' \\ u & u' & b''' & c''' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x' & a & bt^2+cts \\ y & y' & a' & b't^2+c'ts \\ z & z' & a'' & b''t^2+c''ts \\ u & u' & a''' & b'''t^2+c'''ts \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en remplaçant $bt^2+cts, \ldots$ par $\dfrac{x^3-at^3-ds^3}{3s}, \ldots$, divisant par s^2 et simplifiant le second déterminant,

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} x & x' & b & c \\ y & y' & b' & c' \\ z & z' & b'' & c'' \\ u & u' & b''' & c''' \end{vmatrix} - \frac{1}{3} \begin{vmatrix} x & x' & a & d \\ y & y' & a' & d' \\ z & z' & a'' & d'' \\ u & u' & a''' & d''' \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du plan osculateur au point x', y', z', u' de la cubique. Si x', y', z', u' sont les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, on aperçoit de suite, en vertu de la symétrie par rapport à x, y, z, u, d'une part, x', y', z', u', de l'autre, que cette même équation représente le plan des trois points de contact des trois plans osculateurs à la cubique que l'on peut mener par le point x', y', z', u' : ce plan passe par ce dernier point, qui peut en être regardé comme le pôle. Au surplus, l'équation (6) se présente sous la forme de l'équation d'un *complexe* du premier ordre; de là, la série des propositions établies par M. Appell. On mettra l'équation de ce complexe sous la forme habituelle

$$A(x-x') + B(y-y') + C(z-z') + A_1(yz'-y'z) + B_1(zx'-z'x) + C_1(xy'-x'y) = 0,$$

en faisant

$$\begin{aligned} A &= 3(b'c''-b''c') - (a'd''-a''d'), \\ B &= 3(b''c-bc'') - (a''d-ad''), \\ C &= 3(bc'-b'c) - (ad'-a'd); \\ A_1 &= 3(bc'''-cb''') - (ad'''-da'''), \\ B_1 &= 3(b'c'''-c'b''') - (a'd'''-d'a'''), \\ C_1 &= 3(b''c'''-c''b''') - (a''d'''-d''a'''). \end{aligned}$$

Dans le système de coordonnées tétraédriques défini par les
ıations (4), l'équation de ce complexe ou du plan osculateur au
nt X′, Y′, Z′, U′ de la cubique, ou encore l'équation du plan
laire du point X′, Y′, Z′, U′ de l'espace, prendra la forme simple

$$XU' - X'U - \frac{1}{3}(YZ' - Y'Z) = 0.$$

Si l'on se reporte à l'équation (6) et si l'on désigne par A, B,
D les points dont les coordonnées sont respectivement

$$\begin{matrix} a, & a', & a'', & a''', \\ b, & b', & b'', & b''', \\ c, & c', & c'', & c''', \\ d, & d', & d'', & d''', \end{matrix}$$

aperçoit immédiatement que les deux droites AD d'une part,
de l'autre sont deux droites conjuguées du complexe; si, en effet,
est le point dont les coordonnées sont x', y', z', u', le premier
erminant égalé à zéro représente le plan PBC; le second, égalé
même à zéro, le plan PAD : le plan représenté par l'équation (2),
avoir, si l'on veut, le plan polaire du point P, passe par l'inter-
tion de ces deux plans, ou par la droite menée par P qui ren-
ıtre les deux droites AD, BC. Cette remarque conduira immé-
tement à l'identification d'un complexe tel que (2) avec un
aplexe donné du premier ordre; si, en effet, AD, BC sont deux
ites conjuguées de ce dernier, et si l'on désigne par les mêmes
ations que ci-dessus les coordonnées des points A, B, C, D, on
onnait de suite que l'équation du complexe donné devra être de la
me

$$\begin{vmatrix} x & x' & b & c \\ y & y' & b' & c' \\ z & z' & b'' & c'' \\ u & u' & b''' & c''' \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} x & x' & a & d \\ y & y' & a' & d' \\ z & z' & a'' & d'' \\ u & u' & a''' & d''' \end{vmatrix} = 0,$$

ant une certaine constante qui sera donnée avec le complexe;
st bien aisé de mettre cette dernière équation sous la forme (6),
le trouver par conséquent une cubique gauche, telle que le com-
xe du premier ordre qui s'en déduit comme il a été expliqué
cédemment coïncide avec le complexe donné.

Observons encore que la droite AD est une corde de la cubique, que AB est la tangente au point A, DC la tangente au point C, que ABC est le plan osculateur au point A et DBC le plan osculateur au point D; qu'ainsi BC est l'intersection de ces deux plans osculateurs : tout cela résulte immédiatement des remarques qui ont été faites au début.

Enfin, les plans $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, $U = 0$ sont respectivement les plans BCD, ADC, ABD, ABC.

Les points AD sont des points particuliers de la cubique correspondant respectivement aux valeurs particulières $s = 0$, $t = 0$; mais on les remplacera aisément par deux points quelconques de cette même courbe, en employant la substitution

$$t = \lambda t_1 + \lambda' s_1,$$
$$s = \mu t_1 + \mu' s_1;$$

$a, b, \ldots$ seront remplacés par $a_1, b_1, \ldots$, en faisant

$$a_1 = a\lambda^3 + 3b\lambda^2\mu + 3c\lambda\mu^2 + d\lambda^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On remarquera d'abord, en passant, que, si l'on remplace $a, b, \ldots$ par $a_1, b_1, \ldots$, dans les coefficients du complexe, ces coefficients se reproduiront, multipliés par le cube du déterminant $\lambda\mu' - \lambda'\mu$ de la substitution. Soient maintenant A_1, B_1, C_1, D_1 les quatre points qui remplacent A, B, C, D et qui jouissent des mêmes propriétés; regardons momentanément λ, μ comme fixes, λ', μ' comme variables. Le point A_1 restera fixe et le point D_1 décrira la cubique; le point B_1, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{\partial a_1}{\partial \lambda}\lambda' + \frac{\partial a_1}{\partial \mu}\mu',$$
$$y = \frac{\partial a'_1}{\partial \lambda}\lambda' + \frac{\partial a'_1}{\partial \mu}\mu',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

décrira la droite qui joint les deux points E, F dont les coordonnées

sont respectivement

$$x = \frac{\partial a_1}{\partial \lambda} = 3(a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2),$$
$$y = \frac{\partial a'_1}{\partial \lambda} = 3(a'\lambda^2 + 2b'\lambda\mu + c'\mu^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'une part, et

$$x = \frac{\partial a_1}{\partial \mu} = 3(b\lambda^2 + 2c\lambda\mu + d\mu^2),$$
$$y = \frac{\partial a'_1}{\partial \mu} = 3(b'\lambda^2 + 2c'\lambda\mu + d'\mu^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

de l'autre. Cette droite EF est la tangente en A_1, les points E et F sont les points où elle perce respectivement les plans ABC, BCD, osculateurs en A et D ; ils décrivent dans ces deux plans, lorsque λ, μ varient, et que, par suite, A_1 décrit la cubique, deux coniques (α), (δ), tangentes la première à AB en A et à BC en C, la deuxième à BC en B et à CD en D : ces deux coniques sont les intersections des deux plans osculateurs ABC, BCD avec la surface développable dont la cubique est l'arête de rebroussement.

Si on laisse encore λ, μ fixes et si l'on fait varier λ', μ', le point C_1, dont les coordonnées sont

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda^2}\lambda'^2 + 2\frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda \partial \mu}\lambda'\mu' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial \mu^2}\mu'^2,$$
$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial \lambda^2}\lambda'^2 + 2\frac{\partial^2 a'_1}{\partial \lambda \partial \mu}\lambda'\mu' + \frac{\partial^2 a'_1}{\partial \mu^2}\mu'^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

décrit une conique (α_1) située dans le plan des trois points P, Q, R, dont les coordonnées sont respectivement

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda^2} = 6(a\lambda + b\mu),$$
$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial \lambda^2} = 6(a'\lambda + b'\mu),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

pour le point P;

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\partial\mu} = 6(b\lambda + c\mu),$$

$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda\partial\mu} = 6(b'\lambda + c'\mu),$$

......................,

pour le point Q;

$$x = \frac{\partial^2 a_1}{\partial\mu^2} = 6(c\lambda + d\mu),$$

$$y = \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\mu^2} = 6(c'\lambda + d'\mu),$$

....

pour le point R. Ce plan PQR est le plan osculateur en A_1: les points P, Q, R situés respectivement sur les droites AB, BC, CD sont, par suite, les points d'intersection de ces droites avec le plan osculateur; en outre, les droites PQ, QR sont respectivement tangentes en E et F aux coniques (α) et (δ) : lorsque, λ et μ venant à varier, le point A_1 décrit la cubique, les points P, Q, R décrivent respectivement sur les trois droites AB, BC, CD trois divisions homographiques : ainsi, un plan osculateur à une cubique gauche, en se mouvant autour de cette cubique, trace sur deux tangentes quelconques deux divisions homographiques (¹). En vertu des équations qui la déterminent, la conique (α_1) est tangente à PQ en P et à QR en R. En un point quelconque (λ', μ') de cette conique, la tangente joint les deux points dont les coordonnées sont

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda^2}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\mu',$$

$$\frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda^2}\lambda' + \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\mu',$$

....

d'une part, et

$$\frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial\mu^2}\mu',$$

$$\frac{\partial^2 a'_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\lambda' + \frac{\partial^2 a'_1}{\partial\mu^2}\mu',$$

................,

(¹) Ce théorème est dû à M. Chasles (*Journal de Mathématiques*, 1857.)

de l'autre; les coordonnées du point B_1 pouvant s'écrire

$$\left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda_1}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\mu'\right)\lambda + \left(\frac{\partial^2 a_1}{\partial\lambda\,\partial\mu}\lambda' + \frac{\partial^2 a_1}{\partial\mu^2}\mu'\right)\mu,$$

....

On voit que B_1 est sur la tangente en C_1; enfin, en faisant $\lambda' = \lambda$, $\mu' = \mu$, on voit que la conique (α_1) passe en A_1 et qu'elle est tangente en ce point à la tangente A_1B_1 à la cubique : au reste, tous ces résultats se coordonnent en remarquant que, d'après sa définition même, la conique (α_1) est l'intersection du plan osculateur en A_1 à la cubique et de la développable du quatrième ordre circonscrite à cette cubique. Sur ce plan, la conique (α_1) est tracée par une tangente D_1C_1 à la cubique quand le point de contact D_1 décrit cette cubique, et enveloppée par l'intersection B_1C_1 du plan osculateur en D_1.

De ce qu'elle est tangente en A_1 à la droite A_1B_1 ou EF, et aux points P, R aux droites PQ et QR, on conclut que le point A_1 est conjugué harmonique, par rapport aux points E, F du point d'intersection des droites EF et PR : de là on peut déduire la construction point par point d'une cubique gauche et aussi la construction en un point quelconque du plan osculateur et de la tangente.

Étant donnés quatre points A, B, C, D; une première conique (α) située dans le plan ABC, tangente à AB en A, à BC en C; une deuxième conique (δ), située dans le plan BCD, tangente à CD en D et à BC en B; il existe une cubique gauche tangente à AB en A, à CD en D, admettant comme plans osculateurs en A et D les plans ABC, BCD, telle enfin que la surface développable qui lui est circonscrite passe par les coniques (α) et (δ).

D'un point quelconque Q situé sur la tangente commune BC aux deux coniques (α) et (δ), menons à ces deux coniques les secondes tangentes QE, QF qui rencontrent respectivement les droites AB, CD en P et R : le plan QEF sera un plan tangent à la surface développable circonscrite (ou un plan osculateur à la cubique), la droite EF sera une génératrice de la surface développable (ou une tangente à la cubique), enfin le point conjugué harmonique par rapport aux points E, F du point d'intersection de EF et de QR

sera un point de la cubique, où EF sera la tangente et le plan QEF sera le plan osculateur.

Si a, a', a'', a'''; b, b', b'', b''';... sont les coordonnées des points A, B, C, D, les équations de la cubique seront de la forme

$$x = at^3 + 2\lambda bt^2s + 2\mu cts^2 + ds^3,$$
$$y = a't^3 + 2\lambda b'ts + 2\mu c'ts^2 + ds^3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

λ et μ étant deux constantes qui dépendent des coniques (α), (δ).

PUBLICATIONS NOUVELLES.

Aoust (l'Abbé). — Analyse infinitésimale des courbes dans l'espace. — Paris, Gauthier-Villars, 1876. In-8, xx-564 p. 11 fr.

Boussinesq (J.). — Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérulents, comparé à celui des massifs solides, et sur la poussée des terres sans cohésion. — Bruxelles, Hayez, 1876 (Paris, Gauthier-Villars). In-4, 180 p. 10 fr.

Connaissance des Temps ou des mouvements célestes, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1878, publiée par le Bureau des Longitudes. — Paris, Gauthier-Villars, 1876. 1 vol. in-8.

Avec Additions........................ 7 fr. 50 c.
Sans Additions........................ 5 fr.

Additions. — *Villarceau* (*Y.*). Théorie de l'aberration, dans laquelle il est tenu compte du mouvement du système solaire (103 p.). — *Puiseux* (*V.*). Recueil de nombres pouvant servir à la discussion des observations du passage de Vénus du 8 décembre 1874 (40 p.). — *Schulhof* (*L.*). Recherches sur l'orbite de la planète Maïa et éphémérides pour l'opposition de 1876. (31 p.)

Tisserand (F.). — Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal. — Paris, Gauthier-Villars, 1877. In-8, xix-388 p. 7 fr. 50 c.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

WINCKLER (A.). — I. INTEGRATION VERSCHIEDENER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG. (*Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften zu Wien*, 23 juillet 1874.)

— II. INTEGRATION ZWEIER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. (*Ibid.*, 7 janvier 1875.)

I. Dans le premier Mémoire, l'auteur traite des équations linéaires et des équations plus générales du second ordre, telles, par exemple, que les équations de la forme

$$p\frac{d^2y}{dx^2} + q\frac{dy}{dx} + rf(y) = 0,$$

p, q, r désignant des fonctions de x. Pour les équations linéaires, l'intégration complète s'obtient au moyen d'intégrales indéfinies, dans le cas où les coefficients de y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ satisfont à certaines relations. Le nombre considérable des résultats particuliers obtenus est ordonné d'une manière très-claire, grâce à un mode spécial pour les formules, qui facilite l'usage de ce Recueil.

II. Dans le second Mémoire, il est question de l'équation différentielle

$$(H_0t^2 + 2H_1t + H_2)\frac{d^2y}{dt^2} + (K_0t + K_1)\frac{dy}{dt} + L_0y = 0,$$

dans le cas particulier où le coefficient de $\frac{d^2y}{dt^2}$ est le carré d'une expression linéaire. Dans cette hypothèse, l'équation est ramenée à la forme

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + [c + (a + b + 1)x]\frac{dy}{dx} + aby = 0,$$

et ensuite, l'auteur, s'appuyant sur son Mémoire intitulé : *Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Coefficienten lineare Functionen der unabhängigen Verän-*

derlichen sind (*Sitzungsberichte*, t. LXVII), intègre cette équation au moyen des quadratures. Il attribue maintenant des valeurs complexes aux constantes et aux variables, et en déduit des résultats nouveaux.

Enfin il ramène l'équation de Riccati,

$$\frac{dz}{dx} + bz^2 = ax^m,$$

par le procédé connu, à une équation linéaire du second ordre, dont il obtient, dans tous les cas, l'intégrale générale par des quadratures simples, prises entre les limites 0, 1 et ∞. Ed. W.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MONTHLY NOTICES OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON (¹).

T. XXXVI; novembre 1875 à juin 1876.

Novembre 1875.

PRITCHARD (C.). — *L'Observatoire de l'Université d'Oxford.*

Nos lecteurs se rappellent qu'en novembre 1873 le Rev. Pritchard, professeur à l'Université d'Oxford, annonçait à la Société Astronomique de Londres que la création à Oxford d'un Observatoire spécialement destiné aux études d'Astronomie physique avait été décidée par le Conseil de l'Université. Il apprend aujourd'hui que cet établissement est presque complétement achevé et donne quelques détails sur son installation.

Son principal instrument est un équatorial de Grubb, de Dublin, à qui la construction du grand télescope de Melbourne a fait une réputation si justement méritée: l'objectif de ce bel appareil a 12,25 pouces ($0^m,31$) d'ouverture libre et 14 pieds 8 pouces ($4^m,46$) de foyer; ses qualités optiques sont, paraît-il, excellentes, et M. Grubb

---

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, p. 149.

s'est, dit-on, surpassé dans la résolution des différents problèmes mécaniques que présentent l'établissement et la monture des différentes pièces d'un instrument de cette dimension.

On aura une idée des difficultés que le constructeur avait à vaincre lorsqu'on saura qu'au lieu d'un seul chercheur, que portent d'ordinaire les équatoriaux, l'équatorial de l'Université d'Oxford porte, attachées à son tube, quatre lunettes, dont deux, de 4 pouces ($0^m,10$) d'ouverture, sont munies de micromètres comme des équatoriaux, et dont les deux autres sont des chercheurs ordinaires de 2,5 pouces ($0^m,06$) d'ouverture. Cet équatorial est placé sous le dôme occidental de l'édifice.

Le dôme oriental abrite un télescope donné à l'Université par M. Warren de la Rue.

Les deux ailes sont reliées par un bâtiment central qui renferme un autre télescope de M. Warren de la Rue, monté altazimutalement avec de légers mouvements de part et d'autre du méridien, et un petit instrument des passages de 5 pieds ($1^m,53$) de foyer.

WARREN DE LA RUE. — *Efforts faits sur le continent pour le progrès des études d'Astronomie physique.*

Depuis que l'affaiblissement de sa vue empêche cet illustre astronome de continuer ses beaux travaux, il ne néglige aucun moyen d'exciter chez les autres l'ardeur qui l'a si longtemps soutenu.

De retour d'un assez long voyage sur le continent, il entretient aujourd'hui les astronomes anglais du nouvel Observatoire que fait actuellement construire, près de Vienne, le gouvernement Impérial et Royal d'Autriche-Hongrie.

Fondé en 1753 par le P. Hell, l'Observatoire de Vienne avait été, en 1826 et 1827, reconstruit à la même place par J.-J. v. Littrow, père du directeur actuel, et muni de tous les instruments que réclamaient alors les exigences astronomiques; mais, depuis cette époque, les constructions s'étaient peu à peu multipliées à l'entour, et progressivement sa situation était devenue intolérable, car il est aujourd'hui presqu'au centre de la ville de Vienne.

Après de nombreuses démarches, le Directeur actuel, M. C. de Littrow, réussit à faire accepter par le gouvernement le projet de transférer l'Observatoire aux environs de Vienne, dans une position plus avantageuse et plus profitable pour la Science.

Avant de rien décider sur le plan et l'outillage du nouvel Observatoire, le gouvernement austro-hongrois donna à M. Weiss, premier assistant de l'Observatoire, mission de visiter les observatoires publics et privés d'Angleterre et d'Amérique, ainsi que les principaux ateliers de construction d'Europe et des États-Unis.

A son retour, il fut décidé que, conformément à ce qui existait à l'Observatoire Naval de Washington, le principal instrument de l'Observatoire de Vienne serait un équatorial de 26 pouces ($0^m,66$) d'ouverture. Le plan général de l'établissement en résultait.

Au centre un dôme de 41 pieds ($12^m,85$) de diamètre pour le grand équatorial commandé à M. Howard Grubb, de Dublin, à l'est et à l'ouest des dômes de dimensions moindres destinés à abriter l'un un équatorial de 12 pouces ($0^m,31$) commandé à M. Alvan Clark, de Cambridge-Port (Massachusetts, États-Unis); l'autre un télescope devant servir aux études photographiques. Au nord de ce bâtiment principal, dans l'axe du dôme central, un quatrième dôme recouvre une lunette installée dans le premier vertical. Si l'on ajoute à ces appareils un cercle méridien dont l'objectif aura 8 pouces ($0^m,20$) d'ouverture, ainsi que les instruments dont disposait l'ancien Observatoire et qui ont leurs places marquées dans le nouvel établissement, on reconnaitra sans peine que l'esprit si juste et si pratique de M. Littrow a su, tout en se gardant de faire des dépenses fastueuses, mais souvent inutiles, créer un Observatoire où tout instrument a sa fonction, et en même temps réaliser les conditions les meilleures pour le but qu'il est destiné à faire obtenir.

Établi d'ailleurs dans un site admirablement choisi, à 3 milles (5 kilomètres) environ du centre de Vienne, sur un plateau élevé de 60 mètres environ au-dessus du niveau moyen de la ville, le nouvel Observatoire formera un immense bâtiment de 100 mètres de long du nord au sud et de 73 mètres de large dans le sens de l'est à l'ouest, qui renfermera non-seulement tous les laboratoires nécessaires au service scientifique, mais aussi les logements de tous les fonctionnaires de l'établissement.

LINDSAY (lord) et GILL (D.). — *Sur l'état des réductions de leurs observations lors du passage de Vénus.*

Cette Note renferme surtout des détails sur les moyens employés pour avoir une longitude parfaitement contrôlée. Un détail nous

frappe, c'est le nombre considérable de chronomètres emportés par Lord Lindsay. Il avait avec lui *cinquante* chronomètres qui avaient été soigneusement étudiés avant le départ, et qui le furent au retour, au bel Observatoire chronométrique de Liverpool.

Quand donc aurons-nous en France un établissement du genre de celui qui, sous l'habile direction de M. Hartnup, rend de si grands services?

TENNANT (le Colonel). — *Sur l'erreur des positions tabulaires de Vénus pendant le passage du* 8 *décembre* 1874.

Il résulte des calculs du colonel Tennant que les corrections en ascension droite (Æ) et en distance polaire nord (D. P. N) sont données dans les formules suivantes :

$$Æ♀ - Æ⊙ = +4'',47 - 0'',071\,dL - 0,989\,d\pi,$$

$$D.P.N.♀ - D.P.N.⊙ = +2'',24 - 0'',017\,dL - 2,629\,d\pi,$$

où L représente la longitude du lieu et π la parallaxe solaire.

CAPELLO. — *Sur ses anciens dessins du Soleil.*

M. Capello, directeur de l'Observatoire de Lisbonne, adresse à la Société une photographie d'un dessin allégorique publié à Rome en 1635 par Scheiner et Kircher pour représenter le Soleil. « A la vue de ce dessin », dit M. Warren de la Rue, « on serait presque tenté de croire que ces deux astronomes connaissaient déjà les protubérances solaires et la photosphère. »

DAVIS (C.-H.). — *Dessins de Mars et de Jupiter faits avec l'équatorial de* $0^m,66$ *de l'Observatoire Naval des États-Unis.*

Ces dessins ont été faits par M. Holden, l'habile collaborateur de M. Newcomb et comme lui professeur à l'Observatoire Naval de Washington.

NEISON (E.). — *Catalogue d'un certain nombre de points de la surface lunaire déterminés micrométriquement.*

Quelle que soit, pour tous les problèmes que soulève l'Astronomie lunaire, l'importance d'une détermination exacte des positions relatives des points principaux de sa surface tout entière, peu d'astronomes s'étaient occupés de cette question, et par suite les

résultats de leurs travaux présentaient des lacunes assez considérables.

Lohrmann est le premier qui ait entrepris la cartographie exacte de la Lune; il fit 150 bonnes mesures, qui fixèrent les positions de 21 de ses points principaux.

Après lui, Mädler fit sur le même sujet un travail remarquable qui est un véritable modèle et d'où datent réellement nos premières connaissances d'ensemble sur la surface de notre satellite. Ces mesures, au nombre de 784 (¹), le conduisirent à la détermination exacte de 85 nouveaux points de la surface lunaire et à la vérification de quelques-unes des positions données par Lohrmann; de telle sorte qu'en 1832, 105 points principaux de la Lune avaient été déterminés, et leurs positions résultaient d'au moins 8 mesures. Depuis, sauf quelques déterminations isolées de Mädler en vue de trouver le pôle nord de la Lune et de Bessel et Wichmann, afin d'obtenir la position de *Mösting A*, aucun travail d'ensemble n'avait été entrepris. Cependant Bessel, Encke, Mädler et le Conseil de l'Association Britannique en avaient signalé la nécessité.

M. Neison vient de combler cette lacune, et, dans un travail qui l'a occupé pendant les années 1874 et 1875, il a mesuré les positions de 35 points de la surface de la Lune, qui permettront d'obtenir très-exactement et l'équateur lunaire et le premier méridien sélénographique.

AIRY (G.-B.). — *Carte de l'orbite apparente de la planète Mars dans le ciel, du* 25 *juillet au* 28 *octobre* 1877, *et Catalogue des étoiles qui l'avoisinent.*

Cette Carte et ce Catalogue ont pour but de faciliter les observations que feront les astronomes lors de la prochaine opposition de Mars, en vue d'obtenir la valeur de la parallaxe solaire. Ce Catalogue donne les positions pour 1877, janvier 1, de 629 étoiles de grandeurs inférieures à la 9ᵉ, tirées de *Zonæ Regiomontanæ* de Bessel et Weisse.

AIRY (G.-B.). — *Observations spectroscopiques faites à l'Observatoire Royal de Greenwich.*

(¹) Mädler fit en réalité 919 mesures; mais il en rejeta lui-même 104 comme entachées d'erreurs provenant de causes diverses.

Depuis le mois de juillet 1874, une division d'Astronomie physique est établie à l'Observatoire de Greenwich; MM. Christie et Maunder sont chargés des observations qu'elle comporte. Ces observations, que M. Airy communique à la Société Astronomique, sont donc les premières de ce genre qui aient été faites à Greenwich.

Elles s'étendent du 17 juillet 1874 au 30 août 1875, et donnent les mouvements propres des étoiles suivantes :

Véga, Arcturus, Altaïr, α d'Andromède, la Chèvre, β du Cocher, Sirius, Procyon, Castor, Régulus, γ de la Grande Ourse, η de la Grande Ourse, α de la Couronne, α d'Ophiuchus, α du Cygne, α de Pégase.

Ces astronomes ont fait aussi une étude complète des spectres de Mars, Aldébaran et δ de la Vierge.

AIRY (B.-G.). — *Observation de l'éclipse de Soleil du 28-29 septembre 1875, faite à l'Observatoire royal de Greenwich.*

En raison de la petite portion du disque solaire occultée par la Lune, cette éclipse ne pouvait servir à donner les corrections des diamètres du Soleil et de la Lune. Les observations faites avec le grand équatorial n'ont eu d'autre but que de fournir les corrections des positions tabulaires des deux astres. Elles sont les suivantes :

En Æ		En D.P.N.	
Soleil.	Lune.	Soleil.	Lune.
$+0^s,069$	$-0^s,832$	$-0'',23$	$-6'',11$

GLEDHILL (J.). — *Phénomènes des satellites de Jupiter, observés à l'Observatoire de M. Crossley.*

TENNANT (le Colonel). — *Sur l'éphéméride des étoiles circompolaires de M. Pritchard.*

BLACKHOUSE (T.-W.). — *Sur la lumière zodiacale.*

ARUMIS (A.-F.). — *Observations de lumière zodiacale faites à Cadix.*

Découverte de huit petites planètes.

Ces huit petites planètes sont les suivantes :

Numéros.	Auteur de la découverte.	Observatoire et date.
(149)	Perrotin,	Toulouse, 21 septembre 1875.
(150)	Watson,	Ann-Arbor, 19 octobre 1875.
(151)	Palisa,	Pola, 1 novembre 1875.
(152)	Paul Henry,	Paris, 2 novembre 1875.
(153)	Palisa,	Pola, 2 novembre 1875.
(154)	Prosper Henry,	Paris, 4 novembre 1875.
(155)	Palisa,	Pola, 8 novembre 1875.
(156)	Palisa,	Pola, 22 novembre 1875.

Décembre 1875.

Perry (le P.). — *Sur les photographies obtenues à Manille pendant le dernier passage de Vénus.*

Cette collection présente cette importance que quelques-unes des photographies, prises au moment où la planète mordait sur le Soleil, montrent nettement la portion du disque de la planète alors située en dehors du Soleil; cette portion y est notablement plus noire que le fond du ciel environnant.

Rigaud (G.). — *Sur les papiers posthumes du professeur Rigaud.*

Marth (A.). — *Éphéméride destinée à donner les positions des satellites d'Uranus.*

Holden (E.-S.). — *Dessins de la nébuleuse annulaire de la Lyre.*

Ces dessins ont été faits au grand équatorial de $0^{m},66$ de l'Observatoire Naval de Washington. Ils diffèrent en général notablement de ceux qu'obtinrent autrefois Herschel, d'Arrest, Auwers et Schultz; mais M. Holden attribue ces différences, d'une part à la difficulté même d'avoir un dessin rigoureusement semblable à ce que l'on voit, et d'autre part à ce fait bien connu et contre lequel on ne se met pas toujours suffisamment en garde, à savoir que, dès que les lunettes employées ne sont pas optiquement parfaites, les images que donnent d'une même nébuleuse deux lunettes différentes doivent différer les unes des autres.

BURTON (C.-E.). — *Sur la nébuleuse australe* 30 (*Bode*) *de la Dorade et sur celle qui entoure* η *d'Argus.*

PRINCE (C.-L.). — *Sur d'anciens dessins de Saturne.*

M. Prince envoie à la Société des observations et des dessins inédits de la planète Saturne, faits par Gassendi de 1633 à 1656.

ELLERY (L.-J.). — *Résultats de quelques expériences faites avec le pendule parabolique d'Huyghens.*

Ces expériences ont été entreprises en vue d'obtenir un mouvement de rotation uniforme pour les cylindres d'enregistreurs. Elles ont parfaitement réussi, et M. Ellery s'occupe actuellement de chercher un moyen d'appliquer le même mode de régulation aux mouvements d'horlogerie des équatoriaux.

Janvier 1876.

WINNECKE. — *Observation de l'éclipse de Soleil du* 29 *septembre* 1875, *faite à l'Observatoire de l'Université de Strasbourg.*

Les observations ont été faites avec deux héliomètres de $0^m,076$ d'ouverture et $0^m,15$ de foyer.

AIRY (G.-B.). — *Sur l'état actuel des calculs de sa nouvelle théorie de la Lune.*

AIRY (G.-B.). — *Occultations d'étoiles par la Lune et phénomènes des satellites de Jupiter observés à Greenwich pendant l'année* 1875.

BURNHAM (S.-W.). — *Sur les systèmes stellaires doubles* Σ1156 *et* Σ1163.

D'après M. Burnham, il y aurait une erreur dans le Catalogue de Struve, *Mensuræ micrometricæ;* l'étoile double Σ1156 existerait seule, et la principale étoile de ce système serait identique avec la 1346 de la septième heure du Catalogue de Weisse.

TEBBUTT (J.). — *Phénomènes des satellites de Jupiter observés à Windsor* (*New-South-Wales*).

ORDE BROWNE (C.). — *Observations du passage de Vénus faites en Égypte par la mission anglaise.*

En général, le phénomène du contact n'a point apparu aux obser-

vateurs dans sa simplicité géométrique théorique ; mais, soit un ligament, soit des lignes semblables à des lignes d'interférences, l'ont compliqué considérablement. Aussi les nombres donnés par les différents observateurs d'une même station diffèrent-ils beaucoup les uns des autres ; comme exemple, je citerai les nombres suivants obtenus à Suez :

	h m s
M. Hunter.....................	11.16.39,29
M. Engleson..................	11.17.10,87
M. Hunter.....................	11.18.57,29

Webb (T.-W.). — *Sur l'étoile variable* S *d'Orion.*

La période de variabilité de cette étoile serait d'environ 14 mois.

Plummer (J.-J.). — *Mouvements propres de quelques étoiles.*

Les observations méridiennes ayant acquis depuis une quarantaine d'années une précision bien supérieure à celles qu'elles avaient au commencement du siècle, il a paru convenable à M. Marth de déterminer les mouvements propres des étoiles les plus brillantes à l'aide d'observations récentes, au lieu de recourir, comme on l'avait fait pour le *British Association Catalogue*, aux anciennes observations de Bradley et de Piazzi. Le peu de temps qui sépare les époques des deux observations que l'on combine entre elles se trouve compensé par leur précision plus grande. De plus, rien ne prouve que, pendant le long intervalle de 120 ans qui nous sépare des observations de Bradley, les mouvements propres soient restés constants en grandeur et en direction.

Pour certaines étoiles, comme par exemple l'étoile 366 de Bradley, la différence du mouvement propre donné par M. Marth avec celui qu'avaient adopté les rédacteurs du *B. A. C.* s'élève à $0^s,08$.

Christie (H.-M.). — *Sur un nouvel oculaire solaire.*

Pour réduire l'intensité de la lumière solaire, on fait souvent réfléchir la lumière sur un certain nombre de prismes successifs dont les faces réfléchissantes sont placées en avant de la lentille de champ; mais ce procédé nécessite l'emploi de grandes surfaces planes, et rend l'appareil oculaire dispendieux et encombrant. M. Christie obvie à cet inconvénient en plaçant les faces réfléchissantes entre la lentille oculaire et l'œil; tous les faisceaux lumineux passent alors par un petit cercle, l'anneau oculaire, qui n'est autre que l'image de

l'objectif donné par l'oculaire, de telle sorte que l'on n'a plus besoin que de surfaces réfléchissantes de dimensions très-restreintes.

KNORRE. — *Découverte de la planète* (158).

Février 1876.

Ce numéro a été analysé à part

Mars 1876.

CARRINGTON. — *Sur les taches solaires.*

Le secrétaire de la Société Royale Astronomique annonce que la bibliothèque est en possession de tous les manuscrits et dessins de Carrington relatifs aux taches solaires, lord Lindsay lui ayant fait don de ceux qu'il possédait. Cette collection comprend :

3 Volumes in-folio de dessins des taches solaires faits à une échelle telle que le Soleil y ait 12 pouces ($0^m,145$) de diamètre;

3 Volumes in-4° contenant les observations de position des taches;

7 Volumes in-4° renfermant les réductions de ces observations;

1 Volume in-folio plein de dessins de groupes de taches pris de jour en jour, et faits les uns au-dessus des autres sur la même page, de manière à montrer d'un seul coup d'œil l'histoire de chaque groupe et son mouvement en latitude et en longitude.

Ces manuscrits ne sont d'ailleurs point les seuls que possède la Société relativement à ce sujet; leur liste complète est assez intéressante pour être reproduite. Elle est la suivante :

				Août.	Mars.
1	Volume	de dessins par	Charles B. Adams.......	1819	1822
3	»	»	J.-W. Pastorff...........	1819	1833
2	»	»	le Rev. T.-J. Hussey.....	1826	1837
1	»	»	Mr. Lawson.............	1831	1832
1	»	»	le capitaine C. Shea......	1847	1866
2	»	»	le Rev. Temple-Chevalier.	1847	1849
Des dessins détachés du Soleil par sir J. Herschel...				1846	

La Société Royale Astronomique a donc dans sa bibliothèque l'histoire complète de la surface solaire depuis 1819 jusqu'en 1866. Les observations de Carrington, ainsi que la belle série des observations

photographiques faites à Kew d'abord et continuées à Greenwich, poursuivent cette histoire jusqu'à l'époque actuelle.

Royston-Pigott. — *Sur un oculaire destiné à l'observation des passages des étoiles.*

M. Pigott remplace les fils derrière lesquels on observe les passages, par une lame de verre recouverte d'une mince couche d'argent, placée dans le plan focal, et où l'on a tracé une série de lignes très-fines; l'argenture est peu épaisse et permet d'apercevoir les étoiles d'une façon continue; mais celles-ci paraissent beaucoup plus brillantes quand elles traversent les lignes dont nous venons de parler. Ce système ne saurait évidemment convenir pour l'observation des astres de faible éclat.

Zenger (V.). — *Le* Stereo-Micrometer.

Comme son nom l'indique, ce micromètre est fondé sur le principe de la vision binoculaire. Il se compose de deux tubes à tirages, identiques et placés parallèlement à l'axe de la lunette. L'un sert à regarder avec ses deux yeux l'image focale de l'étoile; l'autre vise sur un oculaire micrométrique formé d'une mince lame de mica divisée par des droites rectangulaires en carrés de $\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{30}$ de millimètre de côté.

Si l'une de ces droites est dirigée parallèlement à la direction du mouvement diurne, et si l'on place en un point constant de ce réseau l'image focale d'une des étoiles d'un groupe, on lira, à la seule inspection de la position qu'occupera l'image de la seconde étoile, son angle de position et sa distance par rapport à la première.

Cet instrument paraît surtout pouvoir servir à l'observation des astres assez faibles pour disparaître dès que l'on éclaire le champ de la lunette ou du télescope employé.

Dunkin (E.). — *Comparaison des observations récentes et anciennes de l'étoile* B.A.C. 793; *remarques sur la variabilité supposée de son mouvement propre.*

M. Piazzi Smyth, Astronome royal pour l'Écosse, avait annoncé[1], d'après ses observations, que le mouvement propre de cette étoile était variable. Une conclusion semblable pour Sirius et Procyon

---

[1]) *Monthly Notices*, t. XXXV, p. 356. — Voir *Bulletin*, t. X, p. 56.

ınt conduit les astronomes à des conséquences importantes, il portait de reprendre à nouveau cette question, et de vérifier l'as- ·tion de M. Smyth, d'autant plus qu'elle se rapportait cette fois ıne étoile relativement faible.

Une discussion complète, appuyée sur de nouvelles observations tes au Cap de Bonne-Espérance, a conduit M. Dunkin à une con- ısion diamétralement opposée à celle de M. Piazzi Smyth. Il en ıulte que le mouvement propre de l'étoile B.A.C. 793 n'a pas rié depuis le commencement du siècle.

STONE (E.-J.). — *Sur la variabilité supposée du mouvement 'opre de l'étoile* B.A.C. 793.

M. Stone arrive à la même conclusion que M. Dunkin.

STONE (E.-J.). — *Sur les mouvements propres des deux compo- ıntes du système binaire α du Centaure.*

Ce système est, on le sait, formé d'une étoile de grandeur 1, et 'une autre de grandeur 2, 3. Les observations montrent que leur nouvement propre n'est pas le même; si l'on suppose qu'elles sont ın système physique, il convient de chercher le mouvement propre le son centre de gravité; c'est ce que fait M. Stone, et il arrive aux ıaleurs suivantes :

Mouvement propre en ascension droite......	$-0^s,476$
» » » déclinaison.	$-0'',805$

POGSON (N.-R.). — *Occultation des Pléiades observée à Ma- lras le 7 janvier 1876.*

AIRY (G.-B.). — *Mesures micrométriques des satellites de Sa- ırne faites à l'Observatoire royal de Greenwich pendant l'an- ée 1875.*

Ces observations ont été faites avec le grand équatorial par [M. Christie, Maunder et Jenkins.

ABNEY (W. DE W.). — *Sur la photographie de la partie la oins réfrangible du spectre.*

WITH (G.-H.). — *Observations de la comète de Coggia.*

Ces observations ont été faites avec un télescope newtonien en

verre argenté, dont on faisait varier l'ouverture de $8^p,5$ ($0^m,176$) à $12^p,25$ ($0^m,253$).

Avril 1876.

PENROSE (F.-C.). — *Sur un instrument destiné à la résolution des triangles sphériques par un procédé mécanique.*

DENNING (W.-F.). — *Points radiants de quelques étoiles filantes et observation faite à Bristol de novembre 1872 à mars 1876.*

STONE (E.-J.). — *Sur le résultat le plus probable qu'on puisse déduire d'un nombre donné de déterminations directes ayant des poids assignés.*

WEBB (T.-W.). — *Sur les deux satellites intérieurs d'Uranus.*

Sir John Herschel et l'amiral Smyth ont fait passer pour ainsi dire à l'état d'axiomes astronomiques que l'observation de ces deux satellites était l'une des plus difficiles de l'Astronomie et exigeait des instruments d'une grande puissance.

D'après M. Webb, il n'en serait pourtant rien et la plupart même des amateurs d'Astronomie pourraient observer ces deux satellites. Il cite à l'appui de son dire douze observations faites à Belfast par M. Isaac William Ward avec un objectif de Wray de $4^p,3$ ($0^m,09$) d'ouverture.

Mai 1876.

HOWLETT (F.). — *Dessins des taches solaires.*

M. Howlett offre à la Société cinq volumes in-4° de dessins de taches solaires faits par lui dans les 17 dernières années. M. Dunkin fait alors remarquer que dans la liste publiée précédemment on a oublié de mentionner les manuscrits des observations de Schwab, de Dessau; ils forment 31 volumes, et les observations s'étendent d'une façon continue depuis 1825 jusqu'en 1867.

BIRMINGHAM (J.). — *Sur les cartes lunaires de Lohrmann et Schmidt et sur une nouvelle étoile rouge.*

Cette carte, entièrement achevée, et gravée dans les ateliers de l'État-major prussien, donne les positions d'environ 3400 cratères, d'un nombre égal de collines, ainsi que de 350 ruisseaux et autres objets. Elle mesure 6 pieds français de diamètre, et peut être con-

sidérée comme le résultat d'une intelligence et d'une persévérance scientifiques qu'on ne pourra guère surpasser.

PALMER (H.-S.). — *Sur les récentes déterminations américaines des positions géographiques dans l'Amérique centrale et les territoires de l'Ouest.*

ROBINSON (F.-R.). — *Sur la comparaison des lunettes achromatiques et des télescopes.*

M. Robinson revient sur cette question, si intéressante, de la comparaison des grands miroirs et des grands objectifs : tous les observatoires principaux se lancent, en effet, aujourd'hui, dans la construction d'instruments de très-grande ouverture; Washington, Greenwich et Vienne ont un équatorial de $0^m,66$; Melbourne et Paris ont un télescope de $1^m,20$ d'ouverture. On doit donc savoir gré à M. Robinson d'avoir cherché à comparer les avantages réciproques de ces deux genres d'instruments. Nous compléterons son travail en l'analysant.

Cette comparaison dépend de plusieurs conditions qu'il convient d'examiner successivement.

1° *Pouvoir éclairant d'un miroir et d'un objectif.* — Toutes choses égales d'ailleurs, ce pouvoir éclairant est proportionnel à la surface du cercle qui limite le miroir ou l'objectif, c'est-à-dire au *carré de l'ouverture;* mais, pour deux instruments de même ouverture, il dépend, en outre, d'un coefficient qui n'est pas le même pour les miroirs et pour les objectifs.

Dans un miroir, ce coefficient est constant et n'est autre que le pouvoir réflecteur de la matière polie qui en forme la surface extérieure. Dans un objectif, au contraire, ce coefficient dépend non-seulement de la nature des verres qui le constituent, mais aussi de l'ouverture [1], de telle sorte que, pour les petites ouvertures, le pouvoir éclairant d'un objectif surpasse celui d'un miroir de même dimension; l'ouverture augmentant progressivement, les pouvoirs éclairants deviennent égaux; puis le pouvoir éclairant d'un miroir surpasse celui d'un objectif de même grandeur.

---

[1] Si α désigne l'ouverture, a une constante, A un terme qui représente toutes les autres causes des variations de ce coefficient, que je désigne par m, on a

$$m = A + ae^{-\alpha}.$$

2° *Difficulté du travail optique. Qualités du verre.* — A cet égard, l'avantage est constamment au profit du télescope. Il suffit d'une surface optiquement parfaite, pour obtenir un miroir parfait; il faut en avoir réuni quatre, dans le cas d'un objectif.

Mais, en outre, l'homogénéité intérieure du verre qui sert à faire le miroir du télescope n'a pas d'influence; il suffit que cette homogénéité existe dans la portion du disque par laquelle doit passer la surface optique, son indice de réfraction peut être quelconque; la seule condition exigée est qu'il ne soit pas facilement attaquable par les agents atmosphériques.

Pour un objectif, au contraire, il faut deux disques parfaitement homogènes dans toutes leurs parties, faits de verres différents dont les indices de réfraction doivent avoir des valeurs déterminées et dont l'un, le flint, s'obtient très-difficilement homogène en grandes masses.

3° *Prix relatif d'un télescope et d'un équatorial.* — La monture d'un télescope ou d'un équatorial de grande dimension coûte à peu près la même somme; mais on n'exagère certainement pas en disant qu'un objectif exige six fois plus de dépenses qu'un miroir de même grandeur.

Influence des changements de positions et de l'atmosphère extérieure. — Les molécules d'un corps solide ne sont jamais tellement liées entre elles qu'elles ne puissent changer un peu les unes par rapport aux autres, sous l'influence de forces même relativement faibles, mais agissant constamment : c'est ainsi qu'une barre de fer s'infléchit sous l'action de son propre poids.

Il en est de même de la masse de verre qui forme le miroir ou l'objectif; la forme des surfaces n'est pas la même, lorsqu'ils sont disposés horizontalement ou verticalement, et elle varie d'une façon continue en passant de l'une à l'autre de ces deux positions. Les images que donne, d'un même objet, le miroir ou l'objectif changent donc aussi d'une façon continue dans les mêmes circonstances. Mais, dans le miroir, ces changements, dus à des différences de réflexion, sont doubles de ce qu'ils sont dans un objectif pour une même variation de la forme des surfaces optiques : c'est là un désavantage des miroirs. Pour y remédier, Foucault avait imaginé de faire porter le miroir par un coussin à air, dont on pouvait à volonté changer la pression intérieure; mais je ne sache

pas que cet expédient original, bien digne de ce génie inventif qui ne laissait aucune solution incomplète, ait été employé par d'autres que par lui.

En outre, dans tout télescope, il y a au-dessus du miroir une colonne d'air dont l'une des bases est en communication directe avec l'atmosphère. Ainsi, dès qu'une cause quelconque vient à faire varier la température dans une de ses portions, il s'établit immédiatement à l'intérieur de cette colonne des courants de sens divers, qui changent la course relative des rayons lumineux et diminuent la netteté des images. Lorsque le tube, au lieu d'être entièrement continu, est formé d'une série de tiges parallèles et distantes comme dans le télescope de Lassell, ou bien d'une sorte de treillis métallique comme dans celui de Melbourne, les effets fâcheux de ces variations de température sont considérablement réduits, mais ils n'ont pas encore disparu entièrement.

Rien de pareil n'a lieu dans une lunette achromatique, si ce n'est pour l'observation du Soleil; mais Foucault a montré que, si l'on argentait légèrement l'une des surfaces de l'objectif, les rayons calorifiques étaient presque entièrement réfléchis, quoique l'objectif fût cependant traversé par un nombre assez grand de rayons lumineux pour que l'image focale du Soleil eût une netteté parfaite.

L'image du Soleil, dans une lunette ainsi modifiée, est absolument calme; et ce moyen, adopté par la Commission du passage de Vénus, a assuré aux expéditions françaises une grande supériorité sur celles organisées par les nations étrangères.

Conclusion. — Il ressort de tout ce qui précède que le choix à faire entre le télescope et la lunette achromatique dépend surtout du but que l'observateur se propose d'obtenir.

S'il a principalement en vue la mesure des positions relatives de deux astres voisins, il donnera la préférence à la lunette montée équatorialement.

Si, au contraire, il veut surtout obtenir, soit directement, soit photographiquement, les derniers détails d'un astre, la résolution *d'une nébuleuse* ou la visibilité d'astres très-faibles, il devra de préférence s'adresser au télescope.

Mais ce n'est point à dire pour cela que l'on devra dans les deux cas chercher à produire des surfaces optiques de même ouverture. Les difficultés du travail d'un objectif croissent, en effet,

beaucoup plus rapidement avec l'ouverture que pour un simple miroir. D'un autre côté, la précision des pointés faits avec un équatorial ne peut devenir supérieure à une certaine limite, indépendante de l'ouverture et fonction d'autres causes, qui ne surpassent certainement pas $\frac{2}{10}$ de seconde ou tout au plus $1\frac{1}{2}$ dixième. Il serait donc superflu d'employer des objectifs dont le *pouvoir séparateur* serait supérieur à cette distance angulaire. Ainsi, il n'y a pas d'avantage appréciable à construire des équatoriaux d'ouverture plus grande que 60 centimètres.

Pour le télescope, au contraire, il convient d'augmenter autant que faire se peut le diamètre du miroir. La seule question qui soit encore en suspens est le choix de la monture à adopter.

La disposition dite *de Newton* est incommode pour l'observateur qu'elle oblige à des déplacements considérables et pour ainsi dire continus. Pour les diminuer, on est alors obligé de rendre tout le système oculaire mobile autour de l'axe de l'instrument, ce qui complique beaucoup l'appareil.

La monture *à la Cassegrain* est beaucoup plus commode pour l'observateur, qui se sert de ce télescope comme d'un équatorial ordinaire; elle est aussi plus simple à installer.

Mais la disposition de beaucoup préférable à notre avis, quoiqu'elle n'ait pas encore été fréquemment employée, est celle qu'a imaginée M. Martin et qui consiste à remplacer le petit miroir convexe de Cassegrain par un miroir plan normal à l'axe du miroir, et placé à peu près à moitié distance entre le sommet du miroir et son foyer. La longueur du tube du télescope se trouve ainsi moitié moindre que dans le Cassegrain, sans que l'on perde aucun des avantages de cette disposition. Il en résulte, en même temps qu'une facilité bien plus grande dans le maniement de l'appareil, une économie considérable de temps et d'argent dans la construction de la partie mécanique.

HIND (J.-R.). — *Sur le passage de la grande comète de 1819 au devant du disque solaire.*

CHRISTIE (H.-M.). — *Sur le déplacement des lignes des spectres stellaires.*

M. Christie cherche à expliquer les différences qui existent entre les résultats qu'il a obtenus à l'Observatoire de Greenwich et ceux

qu'a trouvés le P. Secchi à l'Observatoire du Collége Romain. Il y ajoute une nouvelle liste de mouvements obtenus spectroscopiquement à l'Observatoire de Greenwich par M. Maunder et lui. Ils sont résumés dans le tableau suivant, où la colonne E renferme le nom de l'étoile, et la colonne μ son mouvement propre en une seconde suivant la ligne de visée, mouvement exprimé en milles, et où le signe + correspond à un éloignement de la Terre, le signe — à un rapprochement.

E	μ	E	μ
α Andromède..	— 33,0	β Grande Ourse	+ 15,5
Aldébaran.....	+ 35,1	α Grande Ourse	— 37,1
La Chèvre.....	+ 16,0	β Lion........	— 32,7
Rigel.........	+ 25,2	L'Épi (Spica)..	+ 37,2
α Orion.......	+ 76,0	Arcturus......	— 35,0
Sirius.........	+ 22,0	α Couronne....	+ 59,9
Castor.........	+ 29,0	Ophiuchus....	— 39,0
Procyon......	+ 46,0	α Cygne.......	— 50,0
Pollux........	—127,9	α Pégase......	— 32,0
Régulus.......	+ 32,0	La Lune.......	+ 2,0
γ Lion........	— 71,3		

Berg (F.-W.). — *Sur la précession générale.*

Neison (E.). — *Sur les satellites d'Uranus.*

Rogerson (G.-R.). — *Sur la visibilité d'Obéron et de Titan.*

Burnham (S.-W.). — *Catalogue d'étoiles doubles rouges.*

Cette liste comprend les positions des 102 systèmes binaires dont l'une des composantes au moins est rouge. C'est un beau complément du Catalogue publié autrefois par Schjellerup.

Dreyer (J.). — *Sur la comète de Coggia* (III, 1874).

Ces observations ont été faites avec l'équatorial de 11 pouces (0m,23) de l'Observatoire de Copenhague.

Dunkin (E.). — *Découverte de quatre petites planètes.*

Ces quatre planètes sont les suivantes :

[illegible]	découverte par	Peters (C.-H.-F.)	à Clinton (États-Unis).
[illegible]	» »	Watson	à Ann-Arbor (États-Unis).
[illegible]	»	Henry (P.)	à Paris.
		Perrotin	à Toulouse.

Juin 1876.

Denning (W.-F.). — *Visibilité de Mercure et de Vénus pendant le jour.*

M. Denning informe la Société que, du 5 au 28 mai, il a pu voir à l'œil nu la planète Mercure 13 fois le soir, lorsque, après le coucher du Soleil, le ciel était pur. De même, dit-il, pendant les trois mois de mars, avril et mai, Vénus était aisément visible à l'œil nu pendant le crépuscule.

Ces faits, quoique intéressants, sont loin d'être les premiers observés. A Nouméa, avant le passage du 8-9 décembre 1874, nous avons suivi pendant plus de huit jours cette planète Vénus à l'œil nu presque en plein midi, et tous nos collaborateurs la trouvaient aussi aisément que nous.

Neison (E.). — *Sur l'atmosphère de Vénus.*

En 1849, Clausen et Mädler [1] ont publié quelques observations et mesures sur l'allongement des cornes de Vénus quand la planète était près de sa conjonction, observations qui démontraient d'après eux l'existence d'une réfraction considérable due à l'atmosphère de cette planète.

Les calculs qu'ils ont fondés sur les observations, faites avec le grand équatorial de Dorpat, ont conduit ces astronomes à la valeur 43″,7 pour la valeur de la réfraction horizontale à travers l'atmosphère de Vénus; réfraction plus grande environ d'un sixième qu'à travers l'atmosphère terrestre.

M. Neison a repris leurs calculs; et, après y avoir constaté une erreur, il trouve pour valeur de cette réfraction horizontale 53″,40. Il en résulterait que la densité de l'atmosphère à la surface de Vénus serait à peu près *deux fois plus grande* qu'à la surface de la Terre.

Noble (W.) — *Observations physiques de la planète Vénus.*

Plummer (J.-I.). — *Essais photométriques sur la lumière de la planète Vénus.*

D'après ces expériences, la lumière de Vénus, au moment de son

(1) *Astronomische Nachrichten*, 1849, t. XXIX, p. 107.

plus grand éclat, serait de

$$\frac{1}{799,5}$$

de la lumière envoyée par la Lune lorsqu'elle est en opposition.

Bond a fait autrefois une comparaison analogue sur Jupiter, et trouvé qu'au moment de son opposition moyenne cette planète émettait une quantité de lumière égale environ à

$$\frac{1}{6430}$$

de celle de la pleine Lune.

En admettant que les deux résultats soient comparables, la lumière émise par Jupiter serait donc à très peu près *huit fois moindre* que celle qu'envoie Vénus.

Brett (J.). — *Sur le mouvement propre des taches brillantes que l'on observe à la surface de Jupiter.*

Deux taches isolées et bien définies étant apparues sur Jupiter, M. Brett les a soigneusement observées. Il est incontestable pour lui que pendant cinq jours consécutifs d'observations elles ont conservé la même latitude, mais la question de savoir si elles ont eu un déplacement en longitude lui paraît douteuse.

Newcomb (S.). — *Sur une inégalité non encore signalée dans la longitude de la Lune.*

Le célèbre astronome américain signale une nouvelle inégalité, dans la longitude de la Lune, qu'il déduit de la comparaison des observations de Greenwich et de Washington avec les Tables d'Hansen.

« Un terme d'une période inconnue », dit M. Newcomb, « ne saurait être découvert à moins que sa grandeur ne soit telle qu'il affecte les comparaisons individuelles de la théorie et des observations. Les Tables d'Hansen sont les premières qui permettent de remarquer une différence résiduelle aussi faible, 1″, 5, dans la comparaison des observations. » On voit ainsi tous les progrès qu'a faits dans ces dernières années la théorie de la Lune, progrès qui seront bientôt de beaucoup surpassés lorsque les travaux de Delaunay et de M. Airy auront été entièrement publiés.

Berg (F.-W.). — *Sur la détermination de la distance d'une comète à la Terre à l'aide de trois observations.*

Juillet à novembre 1876.

Knobel (E.-B.). — *Bibliographie de diverses publications astronomiques.*

M. Knobel publie le catalogue méthodique et systématique des recherches faites par les différents astronomes sur : les Étoiles doubles, les Étoiles variables, les Étoiles rouges, les nébuleuses et les amas d'étoiles, le mouvement propre des étoiles, la parallaxe des étoiles, le spectre des étoiles.

Les indications bibliographiques de l'auteur permettront de retrouver de suite certains Mémoires que sans cela on ne rencontrerait que bien difficilement.

Lassell (W.). — *Sur la visibilité de la portion non éclairée du disque de Vénus.*

Le 12 et le 13 juillet, par un temps clair et pendant l'après-midi, le célèbre astronome a pu, avec son équatorial de 2 pieds, voir le disque entier de Vénus, quoiqu'il n'y eût qu'un croissant d'éclairé.

ARCHIV DER MATHEMATIK UND PHYSIK; gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe (1).

T. LVII; 1875.

Affolter (Fr.-G.). — *Sur la géométrie du cercle et de la sphère.* (1-62).

1er Mémoire. — 1re Section : Théorie de la puissance. — 2e Section : Le principe des rayons réciproques.

Peschka (G.-Ad.-V.). — *Images perspectives du cercle, et détermination directe de ses diamètres.* (63-72).

Siebel (Alfred). — *Recherches sur les équations algébriques.* (2e art., 73-88; 3e art. 350-365) (2).

---

(1) Voir *Bulletin*, t. VIII, p. 170. — Dans cet article et dans les suivants, les chiffres placés entre parenthèses indiqueront la pagination du commencement et de la fin de chaque Mémoire.

(2) Voir *Archiv*, t. LVI, p. 422, et *Bulletin*, t. VIII, p. 181.

II. Considérations théoriques. — III. Calcul des racines réelles.

Hoppe (R.). — *Sur le problème du système de surfaces triple-ent orthogonal.* (4e art., 89-106; 5e art., 255-276; 6e art., 366-4).

8. Discussion des équations générales de condition pour un sys-ne de surfaces orthogonal qui correspond à un système plan de oites et de trajectoires parallèles. — 9. Cas où il n'existe aucune ation linéaire entre μ, μ_1 et π. — 10. Cas où k est une fonction tière du troisième degré. — 11. Cas où k n'est pas une fonction bique de h. — 12. Cas où π est linéaire en μ et μ_1, mais où μ_1 est pas linéaire en μ. — 13. Cas où π et μ sont linéaires en μ. — . Surface la plus générale d'un système plan commun avec une rface du second degré. — 15. Système orthogonal de surfaces le is général dont se compose un groupe de surfaces coaxiales du ond degré.

)elschläger, Stammer (W.) et Hoppe (R.). — *Sur une formule nue du volume d'un tétraèdre.* (107-111).

)ostor (G.). — *Le trièdre et le tétraèdre, avec application déterminants.* (113-190; fr.).

)ostor (G.). — *Équation générale des deux tangentes menées n même point à une conique, et équation du cône circonscrit à surface du second degré.* (191-203; fr.).

Dostor (G.). — *Nouvelle expression de la surface du triangle, ec application au calcul en déterminant de cette surface en leur des trois côtés du triangle.* (204-208; fr.).

ünther (S.). — *Problème de Stéréométrie.* (209-215).

ombre maximum de sphères qui peuvent toucher à la fois une ère de même rayon que chacune d'elles.

urtze (M.). — *Note sur un Mémoire de M. H. Rath, intitulé : es triangles rationnels »* (¹). (216-217).

Hain (Em.). — *Sur le pentagone des diagonales d'un pentagone inscrit au cercle. — Sur les cercles inscrits au triangle.* (218-219).

(¹) *Archiv*, t. LVI, p. 188.

Ligowski. — *Limites de la base des logarithmes naturels.* (220-221).

Dostor (G.). — *Sommation directe et élémentaire des carrés, des cubes, des quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers.* (222-224; fr.).

Dostor (G.) — *Distances du point à la droite et du point au plan.* (225-233; fr.).

Hochheim (Ad.). — *La poloconique mixte de deux droites par rapport à la courbe différentielle de la parabole.* (234-239).

Günther (S.). — *Résolution d'un système particulier d'équations linéaires.* (240-254).

Günther (S.). — *Le développement des côtes, contribution mathématique à la Géographie comparée.* (277-284).

Günther (S.). — *Démonstration d'un théorème fondamental sur les carrés magiques.* (285-296).

Broda (K.). — *Contribution à la théorie des fractions décimales périodiques mixtes.* (297-301).

Wasserschleben (v.). — *Sur la théorie du triangle équilatéral inscrit dans les sections coniques.* (302-315).

Hain (Em.). — *Sur les harmoniques dans le triangle* (316-321).

Hain (Em.) — *Théorèmes divers sur le triangle.* (322-326).

Zahradník (K.). — *Problème sur les cercles tangents.* (327).

Hoppe (R.). — *Exemple d'une surface à un seul côté.* (328-334).

Dostor (G.). — *Volumes des solides engendrés par la révolution des polygones réguliers autour d'un de leurs côtés.* (334-336; fr.).

Greiner (M.). — *Le facteur de transformation.* (337-342).

Greiner (M.). — *La ligne orthoptique d'une section conique.* (343-349).

Escherich (G.). — *Démonstration de la formule générale de la mesure de la courbure des surfaces.* (385-391).

Löwe (O.). — *Sur les solides réguliers et les solides de Poin-*
, et sur le calcul de leurs volumes au moyen des déterminants.
92-419).

Dickstein (S.). — *Démonstration d'un théorème de la théorie*
calcul des opérations. (420-421).

Hoppe (R.). — *Sur les points de symétrie du triangle.* (422-
8).

Hain (Em.) — *Sur les transversales parallèles dans le triangle.*
Sur le point de concours de transversales parallèles égales.
38-441).

Malý (Fr.). — *Théorèmes sur la droite dans l'espace.* (441-
6).

Meissel (E.). — *Remarques sur la série hypergéométrique.*
46-448).

T. LVIII; 1875-1876.

Dostor (G.). — *Relations entre les sinus des quatre trièdres*
més par quatre droites issues d'un même point, avec applica-
n au tétraèdre. (1-4; fr.).

Dostor (G.). — *Application des discriminants aux courbes et*
faces du second degré. (5-16; fr.).

Dostor (G.). — *Application des déterminants aux surfaces de*
volution et, en particulier, à celles du second degré. (17-22; fr.).

Zahradník (K.). — *Courbes planes rationnelles du troisième*
dre. (23-36).

Hoppe (R.). — *Sur le problème du système de surfaces tri-*
ement orthogonal; 7e article [1]. (37-48).

Ligowski. — *Contribution aux quadratures mécaniques.* (49-83).

Hain (Em.). — *Sur le point de Grebe.* (84-89).

Ayant construit des carrés sur les trois côtés d'un triangle ABC,
it A′ B′ C′ le triangle formé par les côtés de ces carrés, parallèles à

---

[1]) *Voir* ci-dessus, p. 215.

ceux du triangle. Les droites AA', BB', CC' concourent en un point dont M. Hain étudie, après Grebe, les propriétés.

Hain (Em.). — *Sur les bissectrices des angles d'un triangle.* (90-95).

Ligowski. — *Démonstration de la formule donnée par Lhuilier pour l'excès sphérique.* (96-98).

Kosch (F.). — *Trisection d'un angle quelconque au moyen de l'hyperbole équilatère.* (98).

Massion (P.) — *Démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires.* (99-100).

Spitzer (S.). — *Note sur les équations différentielles de la forme* $y''' = x^m (Ax^2y'' + Bxy' + Cy)$. (100-103).

Bender (C.). — *Sur la théorie des lois d'attraction.* (104-109).

Lukas (F.). — *Démonstration de ce théorème :* $x^n + y^n = z^n$, *pour* $n > 2$, *n'est pas résoluble en nombres entiers, avec une courte solution pour* $n = 2$. (109-112).

Oberbeck (A.). — *Sur le potentiel de l'ellipsoïde.* (113-126).

Siebel (A.). — *Recherches sur les équations algébriques* (suite). (127-146) [1].

Pfeil (L. v.). — *Sur la manière de trouver commodément les fonctions des petits angles dans les Tables à cinq décimales.* (147-163).

Hain (Em.). — *Sur le point de Spieker.* (164-169).

Hain (Em.). — *Sur le centre de gravité du triangle.* (170-175).

Hain (Em.). — *Sur les points de symétrie du triangle.* (176-179).

Hellwig (C.). — *Contributions à la théorie du tétraèdre et des angles solides.* (180-184).

---

(1) *Voir* ci-dessus, p. 214.

THIEME (F.-E.). — *Calcul de valeurs limites, avec un aperçu de la théorie des courbes latérales.* (185-214).

HOPPE (R.). — *Sur le problème du mouvement rectiligne d'un point.* (215).

AUGUST (F.). — *Démonstration du théorème de Peaucellier.* (216).

AUGUST (F.). — *Théorème concernant certaines courbes du sixième degré dans l'espace.* (216-218).

THIEME (F.-E.) — *Sur les droites latérales ou imaginaires.* (218-222).

HOZA (F.) — *Remarque sur une proposition de M. Dostor relative au trièdre.* (222-224).

KÜRGER (Ed.). — *Étude de l'orbite d'un point attiré ou repoussé par la force* $\frac{k}{r^4}$, *k étant une constante et r la distance au centre de la force.* (225-277).

HOCHHEIM (Ad.). — *Les foyers de la courbe différentielle de la parabole.* (278-284).

DOSTOR (G.). — *Application des déterminants aux surfaces de révolution et en particulier à celles du second degré.* (285-289; fr.).

DOSTOR (G.). — *Expression en déterminant de la surface d'un triangle de l'espace, en valeur des coordonnées de ses trois sommets.* (289-293; fr.).

DOSTOR (G.). — *Application des déterminants aux surfaces cylindriques, et en particulier aux cylindres du second degré.* (293-300; fr.).

GRAVELAAR (N.-L.-W-A.). — *Nouvelle démonstration de la réalité des racines d'une équation importante.* (301-318).

PFEIL (L. v.). — *Sur l'enseignement de la Trigonométrie.* (319-325).

HERTZ (C.). — *Démonstration d'une proposition de la théorie de l'addition géométrique des droites dans l'espace.* (326-327).

Hoppe (R.). — *Surfaces minima des trois premières classes de polyèdres.* (328-336).

Veltmann (W.). — *Critériums des intégrales singulières des équations différentielles du premier ordre.* (337-341).

Veltmann (W.). — *Sur une espèce particulière de substitutions linéaires successives.* (342-352).

Veltmann (W.). — *Théorie de la machine à influence de seconde espèce de Holtz.* (353-360).

Spitzer (S.). — *Note sur les équations différentielles de la forme* $(a_2 + b_2 x)y'' + (a_1 + b_1 x)y' + (a_0 + b_0 x)y = 0$. (361-368).

Pfeil (L. v.). — *Quelques desiderata touchant la planimétrie.* (369-376).

Pfeil (L. v.). — *Installation de la planchette sur trois points.* (377-379).

Hain (Em.). — *Sur le cercle circonscrit au triangle.* (380-384).

Hain (Em.). — *Sur les systèmes symétriques de points du triangle.* (385-393).

Hain (Em.). — *Sur la formation de nouveaux points de symétrie.* (394-415).

Réthy (M.). — *Les équations fondamentales de la Trigonométrie non-euclidienne établies d'une manière élémentaire.* (416-422).

Hochheim (Ad.). — *Les polaires réciproques de la courbe différentielle de la parabole par rapport à un cercle.* (423-430).

Spitzer (S.). — *Transformation de la fonction* $x^n e^{\lambda x^2}$. (431-432).

Dostor (G.). — *Propriétés des nombres.* (433-435; fr.).

Dostor (G.). — *Détermination du chiffre qui termine les puissances successives des nombres entiers.* (436-337).

HOPPE (R.) — *Remarque sur le calcul des logarithmes à quatre décimales.* (437-439).

LINDMAN (C.-F.). — *Problème de Géométrie.* (440-443; lat.).

KÜLP. — *Procédé expérimental pour déterminer la résistance de conductibilité dans les éléments et dans les boussoles des tangentes.* (444-447).

KÜLP. — *Sur le rapport d'un élément à petite surface à un élément à grande surface.* (448).

MÉLANGES.

SUR LES SUBSTITUTIONS LINÉAIRES PAR LESQUELLES UNE FORME QUADRATIQUE TERNAIRE SE REPRODUIT ELLE-MÊME;

PAR M. JULES TANNERY.

Dans plusieurs Mémoires bien connus, M. Hermite s'est occupé les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même. Plusieurs des formules fondamentales que l'éminent géomètre a utilisées dans ses recherches arithmétiques ont été données par lui sans démonstration. L'intérêt que ces formules ont en elles-mêmes est assez grand pour que j'aie cru pouvoir me permettre d'en donner une démonstration tout élémentaire, en insistant sur quelques points de détail.

1.

Soit

$$f(x, y, z) = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

une forme quadratique ternaire; on se propose de trouver toutes les substitutions linéaires, telles que

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,\\ y &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,\\ z &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z,\end{aligned}\right.$$

par le moyen desquelles on ait identiquement

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z). \tag{2}$$

Désignant par $f'_x, f'_y, f'_z, f'_X, \ldots$ les demi-dérivées partielles de $f(x, y, z), f(X, Y, Z)$ prises par rapport à $x, y, z, X, \ldots$, on pourra écrire l'égalité (2) sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = Xf'_X + Yf'_Y + Zf'_Z,$$

et lui adjoindre l'identité

$$xf'_X + yf'_Y + zf'_Z = Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z;$$

de là on tirera

$$(x-X)(f'_x + f'_X) + (y-Y)(f'_y + f'_Y) + (z-Z)(f'_z + f'_Z) = 0. \tag{2 bis}$$

Si la substitution (1) rend cette dernière équation identique, elle rendra de même identique l'équation (2). Or, en posant pour un instant

$$\begin{cases} x - X = u, & y - Y = v, & z - Z = w, \\ f'_x + f'_X = U, & f'_y + f'_Y = V, & f'_z + f'_Z = W, \end{cases} \tag{3}$$

l'équation (2 *bis*) deviendra

$$uU + vV + wW = 0 \quad (^1). \tag{4}$$

Si, comme nous le supposons essentiellement, le discriminant

$$\Delta = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2$$

n'est pas nul, les trois dernières équations (3) pourront être résolues de manière à exprimer $x + X, y + Y, z + Z$ linéairement en U, V, W; supposons que, dans les équations ainsi obtenues, on remplace x, y, z par leurs valeurs (1) en X, Y, Z : si le déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha + 1 & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' + 1 & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' + 1 \end{vmatrix} \tag{d}$$

(1) C'est à M. Hermite qu'est dû ce point de départ, consistant à ramener le problème à la recherche des substitutions linéaires par lesquelles les variables de l'un des groupes (u, v, w), (U, V, W) s'expriment au moyen des variables de l'autre groupe, et qui rendent identique l'équation (4).

est différent de zéro, on pourra exprimer X, Y, Z (et aussi x, y, z) linéairement en U, V, W; portant les valeurs trouvées dans les trois premières équations (3), on obtiendra les expressions linéaires de u, v, w en U, V, W, expressions linéaires qui devront rendre identique l'équation (4), et qui, par suite, seront nécessairement de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \nu V - \mu W, \\ v = \lambda W - \nu U, \\ w = \mu U - \lambda V. \end{cases}$$

On voit dans ce cas que les équations (1) devront rendre identique l'équation

$$(6)\qquad \lambda(x - X) + \mu(y - Y) + \nu(z - Z) = 0.$$

Examinons maintenant le cas où le déterminant (d) est nul, ou, ce qui revient au même, le cas où les équations

$$f'_x + f'_X = U,\quad f'_y + f'_Y = V,\quad f'_z + f'_Z = W$$

ne peuvent pas être résolues par rapport à X, Y, Z, quand on y a remplacé x, y, z par les valeurs (1); il existera alors trois constantes λ, μ, ν telles que ces mêmes valeurs de x, y, z rendent identique l'équation

$$(7)\qquad \lambda(f'_x + f'_X) + \mu(f'_y + f'_Y) + \nu(f'_z + f'_Z) = 0.$$

Des équations

$$uU + vV + wW = 0,$$
$$\lambda U + \mu V + \nu W = 0,$$

rendues identiques par la substitution (1), on tirera, en ne tenant pas compte d'un facteur commun indifférent,

$$(8)\qquad \begin{cases} U = \nu v - \mu w, \\ V = \lambda w - \nu u, \\ W = \mu u - \lambda v, \end{cases}$$

à moins toutefois que la substitution (1) ne rende identiques les équations

$$(9)\qquad \nu v - \mu w = 0,\quad \lambda w - \nu u = 0,\quad \mu u - \lambda v = 0.$$

On fera rentrer ce cas particulier dans le cas général, en remplaçant λ, μ, ν par $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, chassant les dénominateurs, et supposant que ρ puisse s'annuler.

Il ne sera pas sans intérêt de remarquer que l'on aurait pu modifier l'ordre des raisonnements, et supposer tout d'abord que l'on cherche à résoudre par rapport à x, y, z, X, Y, Z l'ensemble des équations (1) et des trois premières équations (3); cette résolution aurait été ou non possible selon que le déterminant

$$(d') \qquad \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta'-1 & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma''-1 \end{vmatrix}$$

aurait été différent de zéro ou non. Dans le premier cas, les variables U, V, W pourraient être exprimées linéairement en u, v, w par des formules telles que (8) et la substitution (1) rendrait identique l'équation (7), en sorte que le déterminant

$$(d) \qquad \begin{vmatrix} \alpha+1 & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta'+1 & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma''+1 \end{vmatrix}$$

serait nécessairement nul. Si, au contraire, le déterminant (d') était nul, on serait conduit à des équations telles que (5), à moins toutefois que la substitution (7) ne rendît identiques les équations

$$(9\,bis) \qquad \nu V - \mu W = 0, \quad \lambda W - \nu U = 0, \quad \mu U - \lambda V = 0.$$

On fera encore rentrer ce cas dans le précédent, en supposant que les quantités λ, μ, ν puissent devenir infinies.

En résumé, on parvient à deux systèmes de substitutions satisfaisant à la condition énoncée.

On rendra identique l'égalité

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z),$$

en faisant soit

$$(10) \qquad \begin{cases} x - X = \nu(f'_y + f'_Y) - \mu(f'_z + f'_Z), \\ y - Y = \lambda(f'_z + f'_Z) - \nu(f'_x + f'_X), \\ z - Z = \mu(f'_x + f'_X) - \lambda(f'_y + f'_Y), \end{cases}$$

soit

$$(11)\qquad \begin{cases} f'_x + f'_X = \nu(y - Y) - \mu(z - Z), \\ f'_y + f'_Y = \lambda(z - Z) - \nu(x - X), \\ f'_z + f'_Z = \mu(x - X) - \lambda(y - Y). \end{cases}$$

En résolvant ces équations par rapport à x, y, z, on aura deux systèmes d'équations telles que (1), satisfaisant à la condition énoncée, les neuf coefficients de la substitution étant exprimés au moyen des coefficients de la forme quadratique et des trois quantités λ, μ, ν.

Mais il est aisé de passer d'un système à l'autre, comme on va le montrer, en transformant légèrement les équations (10). Multipliant ces équations par a, b'', b', et ajoutant, il vient

$$(12)\qquad f'_x - f'_X = \begin{vmatrix} \lambda & a & f'_x + f'_X \\ \mu & b'' & f'_y + f'_Y \\ \nu & b' & f'_z + f'_Z \end{vmatrix}.$$

Posons

$$A = a'a'' - b^2, \quad A' = a''a - b'^2, \quad A'' = aa' - b''^2,$$
$$B = b'b'' - ab, \quad B' = b''b - a'b', \quad B'' = bb' - a''b'',$$
$$\Delta = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2,$$
$$\lambda' = A\lambda + B''\mu + B'\nu,$$
$$\mu' = B''\lambda + A'\mu + B\nu,$$
$$\nu' = B'\lambda + B\mu + A''\nu,$$

et remarquons que l'on a

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & f'_x + f'_X \\ \mu & b'' & f'_y + f'_Y \\ \nu & b' & f'_z + f'_Z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda' & \Delta & \Delta(x+X) \\ \mu' & 0 & \Delta(y+Y) \\ \nu' & 0 & \Delta(z+Z) \end{vmatrix}$$
$$= \Delta^2[\nu'(y + Y) - \mu'(z + Z)],$$

et par suite

$$\begin{vmatrix} \lambda & a & f'_x + f'_X \\ \mu & b'' & f'_y + f'_Y \\ \nu & b' & f'_z + f'_Z \end{vmatrix} = \nu'(y + Y) - \mu'(z - Z);$$

on voit que l'équation (12) peut s'écrire

$$f'_x - f'_X = \nu'(y + Y) - \mu'(z + Z).$$

Cette équation, si l'on change respectivement λ, μ, ν et X, Y, Z en λ', μ', ν' et $-X$, $-Y$, $-Z$, deviendra la première des équations (11); en faisant le même changement dans les trois équations (10), on aura donc un système équivalent au système (11). Comme le nom des variables n'importe pas, on voit, en résumé, que, des deux systèmes de substitutions auxquels nous sommes parvenus, le premier peut être mis sous l'une ou sous l'autre des deux formes équivalentes qui suivent :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x - X = \nu(f'_y + f'_Y) - \mu(f'_z + f'_Z), \\ y - Y = \lambda(f'_z + f'_Z) - \nu(f'_x + f'_X), \\ z - Z = \mu(f'_x + f'_X) - \lambda(f'_y + f'_Y); \end{cases}$$

$$\text{(I bis)} \quad \begin{cases} f'_x - f'_X = \nu'(y + Y) - \mu'(z + Z), \\ f'_y - f'_Y = \lambda'(z + Z) - \nu'(x + X), \\ f'_z - f'_Z = \mu'(x + X) - \lambda'(y + Y), \end{cases}$$

et que le second se déduit du premier en changeant X, Y, Z en $-X$, $-Y$, $-Z$:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} x + X = \nu(f'_y - f'_Y) - \mu(f'_z - f'_Z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$\text{(II bis)} \quad \begin{cases} f'_x + f'_X = \nu'(y - Y) - \mu'(z - Z), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il suffit évidemment d'étudier le premier système.

La résolution des équations (I) se fait aisément, en considérant à la fois les six équations (I), (I *bis*), et les six inconnues x, y, z, f_x, f'_y, f'_z ; on voit d'abord que

$$\lambda x + \mu y + \nu z = \lambda X + \mu Y + \nu Z.$$

Si l'on désigne ces deux quantités égales par Π, on aura

$$\lambda' f'_x + \mu' f'_y + \nu' f'_z = \lambda' f'_X + \mu' f'_Y + \nu' f'_Z = \Delta\Pi.$$

Si, des deux dernières équations (I *bis*), on tire les valeurs de f'_y et

de f'_z, et qu'on les porte dans la première équation (I), on aura

$$x - X = 2(\nu f'_Y - \mu f'_Z) + \lambda'[\lambda(x+X) + \mu(y+Y) + \nu(z+Z)] - (\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu')(x+X),$$

ou encore

$$x(1 + \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') = X(1 - \lambda\lambda' - \mu\mu' - \nu\nu') + 2(\nu f'_Y - \mu f') + 2\lambda'\Pi;$$

on trouvera de même

$$f'_x(1 + \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') = f'_X(1 - \lambda\lambda' - \mu\mu' - \nu\nu') + 2(\nu' Y - \mu' Z) + 2\Delta\Pi\lambda.$$

Si donc on pose

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = A\lambda^2 + A'\mu^2 + A''\nu^2 + 2B\mu\nu + 2B'\lambda\nu + 2B''\lambda\mu = F(\lambda, \mu, \nu),$$

les six équations (I) et (I *bis*) pourront être remplacées par les six équations suivantes :

er

$$\left\{\begin{aligned}
x[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] &= X[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + 2(\nu f'_Y - \mu f'_Z) + 2\Pi\lambda',\\
y[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] &= Y[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + 2(\lambda f'_Z - \nu f'_X) + 2\Pi\mu',\\
z[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] &= Z[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + 2(\mu f'_X - \lambda f'_Y) + 2\Pi\nu';\\
f'_x[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] &= f'_X[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + 2(\nu' Y - \mu' Z) + 2\Delta\Pi\mu,\\
f'_y[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] &= f'_Y[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + 2(\lambda' Z - \nu' X) + 2\Delta\Pi\lambda,\\
f'_z[1 + F(\lambda, \mu, \nu)] &= f'_Z[1 - F(\lambda, \mu, \nu)] + 2(\mu' X - \lambda' Y) + 2\Delta\Pi\nu.
\end{aligned}\right.$$

D'ailleurs on déduirait bien facilement les trois dernières des trois premières, ou inversement. Si l'on voulait avoir les équations résolues par rapport à X, Y, Z, il suffirait, dans les formules précédentes, de changer x, y, z en X, Y, Z, et réciproquement, puis λ, μ, ν en $-\lambda$, $-\mu$, $-\nu$, et par conséquent Π en $-\Pi$, λ', μ', ν' en $-\lambda''$, $-\mu''$, $-\nu''$.

Si, dans les équations (I *ter*), on remplace λ, μ, ν par $\frac{\lambda}{\rho}$, $\frac{\mu}{\rho}$, $\frac{\nu}{\rho}$, qu'on chasse les dénominateurs et qu'on fasse $\rho = 0$, on trou-

vera

$$x = -X + \frac{2\Pi\lambda'}{F(\lambda, \mu, \nu)},$$

$$y = -Y + \frac{2\Pi\mu'}{F(\lambda, \mu, \nu)},$$

$$z = -Z + \frac{2\Pi\nu'}{F(\lambda, \mu, \nu)}.$$

Ce sont les mêmes valeurs qu'on tirerait des équations (9 *bis*) ou

$$\frac{f'_x + f'_X}{\lambda} = \frac{f'_y + f'_Y}{\mu} = \frac{f'_z + f'_Z}{\nu},$$

en leur adjoignant la condition

$$f(x, y, z) = f(X, Y, Z);$$

car, si l'on désigne par t la valeur commune des trois rapports, on voit aisément que ces équations peuvent être remplacées par les suivantes :

$$x = -X + \lambda' \frac{t}{\Delta},$$

$$y = -Y + \mu' \frac{t}{\Delta},$$

$$z = -Z + \nu' \frac{t}{\Delta};$$

t sera déterminé par l'équation

$$f(X, Y, Z) = f\left(-X + \lambda' \frac{t}{\Delta},\ -Y + \mu' \frac{t}{\Delta},\ -Z + \nu' \frac{t}{\Delta}\right),$$

ou

$$2(\lambda' f'_X + \mu' f'_Y + \nu' f'_Z) = \frac{t}{\Delta} f(\lambda', \mu', \nu').$$

Or

$$\lambda' f'_X + \mu' f'_Y + \nu' f'_Z = \Delta\Pi,$$

$$\begin{aligned} f(\lambda', \mu', \nu') &= \lambda' f'_{\lambda'} + \mu' f'_{\mu'} + \nu' f'_{\nu'} \\ &= \Delta(\lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu') = \Delta F(\lambda, \mu, \nu); \end{aligned}$$

donc

$$\frac{t}{\Delta} = \frac{2\Pi}{F(\lambda, \mu, \nu)},$$

retombe par conséquent sur les mêmes valeurs que précé-
nt.

résoudre les équations (II) ou (II *bis*), il suffira évidem-
lans les formules (I *ter*), de changer X, Y, Z en —X, — Y,
n trouvera ainsi

$$\left\{\begin{array}{l} x[1+F(\lambda,\mu,\nu)] = -X[1-F(\lambda,\mu,\nu)] \\ \qquad\qquad -2(\nu f'_Y - \mu f'_Z) - 2\Pi\lambda', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

II.

asse maintenant à la question suivante : si, dans les équa-
), qui définissent x, y, z au moyen de X, Y, Z, on remplace
Z par des fonctions linéaires de X_1, Y_1, Z_1 définies par les
ns (I) elles-mêmes, dans lesquelles on aurait substitué res-
ment X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1; λ_1, μ_1, ν_1 à x, y, z; X, Y, Z; λ,
n exprimera x, y, z linéairement en X_1, Y_1, Z_1, de façon
n ait évidemment

$$f(x,y,z) = f(X_1, Y_1, Z_1),$$

e que les coefficients de la substitution devront dépendre de
iantités $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ analogues à λ, μ, ν; ces trois quantités
ent évidemment de $\lambda, \mu, \nu, \lambda_1, \mu_1, \nu_1$ et des coefficients de la
[uadratique : je me propose de les calculer.
ns donc

$$\left\{\begin{array}{l} x - X = \nu\,(f'_y + f'_Y) - \mu\,(f'_z + f'_Z), \\ y - Y = \lambda\,(f'_z + f'_Z) - \nu\,(f'_x + f'_X), \\ z - Z = \mu\,(f'_x + f'_X) - \lambda\,(f'_y + f'_Y); \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} f'_x - f'_X = \nu'(y + Y) - \mu'(z + Z), \\ f'_y - f'_Y = \lambda'(z + Z) - \nu'(x + X), \\ f'_z - f'_Z = \mu'(x + X) - \lambda'(y + Y); \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} X - X_1 = \nu_1(f'_Y + f'_{Y_1}) - \mu_1(f'_Z + f'_{Z_1}), \\ Y - Y_1 = \lambda_1(f'_Z + f'_{Z_1}) - \nu_1(f'_X + f'_{X_1}), \\ Z - Z_1 = \mu_1(f'_X + f'_{X_1}) - \lambda_1(f'_Y + f'_{Y_1}); \end{array}\right.$$

$$(2\,bis)\quad\begin{cases} f'_X - f'_{X_1} = \nu'_1(Y + Y_1) - \mu'_1(Z + Z_1),\\ f'_Y - f'_{Y_1} = \lambda'_1(Z + Z_1) - \nu'_1(X + X_1),\\ f'_Z - f'_{Z_1} = \mu'_1(X + X_1) - \lambda'_1(Y + Y_1).\end{cases}$$

Les équations (1) et (1 *bis*) sont équivalentes ainsi que les équations (2) et (2 *bis*); les quantités λ', μ', ν', d'une part, et $\lambda'_1, \mu'_1, \nu'_1$, de l'autre, dépendent de λ, μ, ν et de λ_1, μ_1, ν_1, comme il a été expliqué dans la première Partie.

Tirant des deux dernières équations (2 *bis*) f'_Y et f'_Z, et les portant dans la première équation (1), il vient

$$(3)\quad\begin{cases} x - X = \nu(f'_y + f'_{Y_1}) - \mu(f'_z + f'_{Z_1})\\ \qquad + \lambda'_1[\lambda(X + X_1) + \mu(Y + Y_1) + \nu(Z + Z_1)] - \Gamma(X + X_1),\end{cases}$$

en faisant

$$(4)\quad\begin{cases} \Gamma = \lambda\lambda'_1 + \mu\mu'_1 + \nu\nu'_1 = \lambda_1\lambda' + \mu_1\mu' + \nu_1\nu'\\ \quad = A\lambda\lambda_1 + A'\mu\mu_1 + A''\nu\nu_1\\ \qquad + B(\mu\nu_1 + \mu_1\nu) + B'(\lambda\nu_1 + \lambda_1\nu) + B''(\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu).\end{cases}$$

Tirant de même f'_Y et f'_Z des deux dernières équations (1 *bis*) et les portant dans la première équation (2), il vient

$$(5)\quad\begin{cases} X - X_1 = \nu_1(f'_y + f'_{Y_1}) - \mu_1(f'_z + f'_{Z_1})\\ \qquad - \lambda'[\lambda_1(x + X) + \mu_1(y + Y) + \nu_1(z + Z)] + \Gamma(x + X_1);\end{cases}$$

ajoutant les équations (3) et (5), et tenant compte des identités

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = \lambda x + \mu y + \nu z,$$
$$\lambda_1 X + \mu_1 Y + \nu_1 Z = \lambda_1 X_1 + \mu_1 Y_1 + \nu_1 Z_1,$$

il vient

$$(6)\quad\begin{cases} (1 - \Gamma)(x - X) = (\nu + \nu_1)(f'_y + f'_{Y_1}) - (\mu + \mu_1)(f'_z + f'_{Z_1})\\ \qquad + \lambda'_1[\lambda(x + X_1) + \mu(y + Y_1) + \nu(z + Z_1)]\\ \qquad - \lambda'[\lambda_1(x + X_1) + \mu_1(y + Y_1) + \nu_1(z + Z_1)].\end{cases}$$

Or les deux derniers termes du second membre, si l'on y remplace $\lambda, \ldots, \lambda_1, \ldots$ par $\dfrac{a\lambda' + b''\mu' + b'\nu'}{\Delta}, \ldots, \dfrac{a\lambda'_1 + b''\mu'_1 + b'\nu'_1}{\Delta}, \ldots,$

deviennent

$$\frac{1}{\Delta}\lambda'_1[\lambda'(f'_x+f'_{X_1})+\mu'(f'_y+f'_{Y_1})+\nu'(f'_z+f'_{Z_1})]$$

$$-\frac{1}{\Delta}\lambda'[\lambda'_1(f'_x+f'_{X_1})+\mu'_1(f'_y+f'_{Y_1})+\nu'_1(f'_z+f'_{Z_1})],$$

en sorte que l'équation (6) prend la forme

$$(1-\Gamma)(x-X)=\left(\nu+\nu_1+\frac{\lambda'_1\mu'-\lambda'\mu'_1}{\Delta}\right)(f'_y+f'_{Y_1})$$

$$-\left(\mu+\mu_1+\frac{\nu'_1\lambda'-\nu'\lambda'_1}{\Delta}\right)(f'_z+f'_{Z_1}).$$

Si donc on pose

$$\mathfrak{L}=\frac{\lambda+\lambda_1+\dfrac{\mu'_1\nu'-\mu'\nu'_1}{\Delta}}{1-\Gamma.},\quad \mathfrak{M}=\frac{\mu+\mu_1+\dfrac{\nu'_1\lambda'-\nu'\lambda'_1}{\Delta}}{1-\Gamma},$$

$$\mathfrak{N}=\frac{\nu+\nu_1+\dfrac{\lambda'_1\mu'-\lambda'\mu'_1}{\Delta}}{1-\Gamma},$$

x, y, z s'exprimeront au moyen de X_1, Y_1, Z_1 par les formules

$$(7)\qquad\left\{\begin{aligned} x-X_1&=\mathfrak{N}(f'_y+f'_{Y_1})-\mathfrak{M}(f'_z+f'_{Z_1}),\\ y-Y_1&=\mathfrak{L}(f'_z+f'_{Z_1})-\mathfrak{N}(f'_x+f'_{X_1}),\\ z-Z_1&=\mathfrak{M}(f'_x+f'_{X_1})-\mathfrak{L}(f'_y+f'_{Y_1}),\end{aligned}\right.$$

qui sont tout à fait analogues aux formules (1).

Les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ peuvent être mises sous une forme un peu différente.

En faisant

$$\begin{aligned} l&=\mu\nu_1-\mu_1\nu,\\ m&=\nu\lambda_1-\nu_1\lambda,\\ n&=\lambda\mu_1-\lambda_1\mu,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L&=al+b''m+b'n,\\ M&=b''l+a'm+bn,\\ N&=b'l+bm+a''n,\end{aligned}$$

on vérifie aisément que l'on a

$$\Delta L = \mu'\nu'_1 - \mu'_1\nu',$$
$$\Delta M = \nu'\lambda'_1 - \nu'_1\lambda',$$
$$\Delta N = \lambda'\mu'_1 - \lambda'_1\mu';$$

les valeurs de $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ peuvent donc s'écrire sous la forme suivante, que leur a donnée M. Hermite :

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda + \lambda_1 - L}{1 - \Gamma}, \quad \mathcal{M} = \frac{\mu + \mu_1 - M}{1 - \Gamma}, \quad \mathcal{N} = \frac{\nu + \nu_1 - N}{1 - \Gamma}.$$

Nous avons combiné deux substitutions du type I; on obtiendra des résultats analogues en combinant deux substitutions du type II. Si l'on fait

$$x - X = \nu(f'_y - f'_Y) - \mu(f'_z - f'_Z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X - X_1 = \nu_1(f'_Y - f'_{Y_1}) - \mu_1(f'_Z - f'_{Z_1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on trouvera

$$x - X_1 = \mathcal{N}(f'_y - f'_{Y_1}) - \mathcal{M}(f'_z - f'_{Z_1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ conservant les mêmes valeurs que précédemment. En combinant deux substitutions appartenant toutes les deux au même type, on obtient donc comme résultat une substitution appartenant au premier type; au contraire, si l'on combine deux substitutions appartenant à des types différents, on obtient une combinaison appartenant au second type. Si l'on fait, par exemple,

$$x - X = \nu(f'_y - f'_Y) - \mu(f'_z - f'_Z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$X + X_1 = \nu_1(f'_y - f'_{Y_1}) - \mu_1(f'_z - f'_{Z_1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on trouvera, en changeant simplement X_1, Y_1, Z_1 en $-X_1$, $-Y_1$,

— Z_1 dans les équations (7),

$$x + X_1 = \mathfrak{N}(f'_y - f'_{Y_1}) - \mathfrak{M}(f'_z - f'_{Z_1}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

naturellement les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sont encore les mêmes.

FORMULES FONDAMENTALES DE CINÉMATIQUE DANS LES ESPACES DE COURBURE CONSTANTE;

PAR M. E. BELTRAMI.

(Extrait d'un Mémoire lu à l'Académie Royale des Lincei, à Rome.)

Je prendrai l'expression du carré de l'élément linéaire ds sous la forme connue

$$(1)\qquad \frac{ds^2}{R^2} = \frac{dx^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n}{x^2},$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées *linéaires* d'un point quelconque du $n^{ième}$ espace (c'est-à-dire telles que chaque droite est représentée par $n - 1$ équations du premier degré), R est le rayon pseudo-sphérique constant, et x est une variable surnuméraire définie par l'équation

$$(2)\qquad x^2 + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = a^2,$$

où a est une constante finie.

Je considère maintenant un système continu de points; je désigne par $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ les variations infiniment petites des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ d'un de ces points par suite d'un déplacement élémentaire quelconque, par δx la variation qui s'ensuit pour x, et je vais chercher une expression de forme convenable pour la variation δds que reçoit la distance ds de deux points contigus du système.

De l'équation (1), écrite de cette manière

$$\frac{ds^2}{R^2} = \left(\frac{dx}{x}\right)^2 + \sum\left(\frac{dx_r}{x}\right)^2,$$

on tire

$$\frac{ds\,\delta ds}{R^2} = \frac{dx}{x}\delta\frac{dx}{x} + \sum \frac{dx_r}{x}\delta\frac{dx_r}{x};$$

ce qui, par suite de l'identité

$$\frac{dx_r}{x} = d\frac{x_r}{x} + \frac{x_r\,dx}{x^2},$$

peut être aussi écrit sous la forme

$$\frac{ds\,\delta ds}{R^2} = \frac{dx}{x}\delta\frac{dx}{x} + \sum \frac{dx_r}{x}\,d\delta\frac{x_r}{x} + \sum \frac{dx_r}{x}\delta\left(\frac{x_r}{x}\frac{dx}{x}\right).$$

Mais on a aussi

$$\sum \frac{dx_r}{x}\delta\left(\frac{x_r}{x}\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x}\sum \frac{dx_r}{x}\delta\frac{x_r}{x} + \delta\frac{dx}{x}\sum \frac{x_r\,dx_r}{x^2},$$

savoir (2),

$$\sum \frac{dx_r}{x}\delta\left(\frac{x_r}{x}\frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x}\sum \frac{dx_r}{x}\delta\frac{x_r}{x} - \frac{dx}{x}\delta\frac{dx}{x};$$

donc

$$\frac{ds\,\delta ds}{R^2} = \sum \frac{dx_r}{x}\left(d\delta\frac{x_r}{x} + \frac{dx}{x}\delta\frac{x_r}{x}\right),$$

d'où

$$(3) \qquad \delta ds = \frac{R^2}{x^2}\sum \frac{dx_r}{ds}\,d\left(x\delta\frac{x_r}{x}\right),$$

Telle est la forme qu'il convient de donner à l'expression de

Cette formule pourrait servir, à cause de sa généralité, recherche des équations fondamentales de la Cinématique systèmes de forme variable. Mais, me bornant, pour le prése la considération des systèmes rigides, je poserai $\delta ds = 0$, ce donne, comme condition nécessaire et suffisante de chaque d cement non accompagné de déformation,

$$(4) \qquad \sum dx_r\,d\left(x\delta\frac{x_r}{x}\right) = 0.$$

Il s'agit maintenant de tirer de cette équation les valeurs les

générales des variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$, en fonction des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Posant d'abord

$$X_r = x\,\delta\frac{x_r}{x}, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

on voit que les n fonctions inconnues $X_1, X_2, \ldots X_n$ doivent satisfaire, en vertu de l'équation (4), à l'identité

$$\sum_r \sum_s \frac{\partial X_r}{\partial x_s} dx_r dx_s = 0; \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 1, 2, \ldots n, \\ s = 1, 2, \ldots n, \end{array} \right.$$

ce qui exige que l'on ait

$$(5) \qquad \frac{\partial X_r}{\partial x_s} + \frac{\partial X_s}{\partial x_r} = 0,$$

pour toutes les valeurs, égales ou inégales, des indices r et s. De cette équation on tire, quel que soit le troisième indice t,

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial X_r}{\partial x_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_t}\right) = 0,$$

savoir, à cause de la même équation (5) appliquée successivement aux indices r, t, et s, t,

$$\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial X_t}{\partial x_r}\right) + \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\partial X_t}{\partial x_s}\right) = 0,$$

ou enfin

$$\frac{\partial^2 X_t}{\partial x_r \partial x_s} = 0.$$

Puisque r, s, t sont ici trois indices quelconques, égaux ou inégaux, de la série $1, 2, \ldots, n$, on voit, par cette dernière formule, que les n fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ont toutes leurs secondes dérivées nulles. Elles sont donc nécessairement de la forme linéaire

$$X_r = c_r + c_{1r} x_1 + c_{2r} x_2 + \ldots + c_{nr} x_n,$$

les quantités c_r, aussi bien que les $c_{r,s}$, étant constantes par rapport aux coordonnées (et fonctions, en général, du temps) ; mais, puisque les fonctions X doivent encore satisfaire aux conditions primitives

(5), les quantités c_{rs} ne sont pas absolument arbitraires; on doit avoir

$$c_{rs} - c_{sr} = 0 \tag{6}$$

pour toutes les valeurs, égales ou inégales, des indices r et s.

Ces conditions étant supposées satisfaites, on a donc

$$x\,\delta\frac{x_r}{x} = c_r + \sum_i c_{ir}\,x_i,$$

d'où l'on tire

$$\delta x_r = c_r + \sum_i c_{ir}x_i + \frac{x_r}{x}\,\delta x, \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Multipliant par x_r et sommant par r, eu égard aux équations (2) et (6), on trouve

$$\delta x = -\frac{x}{a^2}\sum c_r x_r,$$

valeur qui, étant substituée dans la formule précédente, donne enfin

$$\delta x_r = c_r + \sum_i c_{ir}\,x_i - \frac{x_r}{a^2}\sum_i c_i\,x_i, \tag{7}$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n$. On doit compléter ces n expressions par celle de δx,

$$\delta x = -\frac{x}{a^2}\sum c_i x_i. \tag{8}$$

Les n équations (7) sont les formules différentielles fondamentales (analogues à celles d'Euler) de la Cinématique des corps solides dans un n-espace de courbure constante. Les $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités arbitraires c_r et c_{rs}, qu'on doit considérer, généralement parlant, comme des fonctions arbitraires du temps t, multipliées par δt (durée infiniment petite du déplacement élémentaire), sont les analogues des six composantes de la translation et de la rotation dans la théorie ordinaire.

De l'équation complémentaire (8), qui est une suite nécessaire des formules (7), on peut tirer une conséquence très-importante. Il en résulte, en effet, que, pour tous les points du $(n-1)$-espace

limite $x=0$ (supposés reliés au système solide), on a $\delta x=0$; c'est-à-dire que ces points ne quittent pas cet $(n-1)$-espace, ou, ce qui est la même chose, que cet espace se déplace sur lui-même, en restant invariable par rapport au n-espace que l'on considère. Cette propriété, qui n'est ici qu'un corollaire de l'invariabilité qu'on a supposé à l'élément linéaire, devient au contraire la définition de la transformation homographique *spéciale*, appelée *mouvement de système invariable*, lorsque la géométrie des espaces de courbure constante est envisagée, d'après MM. Cayley et Klein, comme une théorie projective générale; la conception projective de la *distance* est la clef de cette identité admirable autant que fondamentale.

Désignant par $u_1, u_2, \ldots, u_n$ les coordonnées d'un point ou pôle, l'équation linéaire en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_n x_n = a^2, \tag{9}$$

représente ce qu'on peut appeler le $(n-1)$-plan polaire de ce point par rapport à l'espace limite $x=0$. Si le point (u) est réel, je veux dire *intérieur* à $x=0$, le plan (9) est idéal, c'est-à-dire *extérieur* à $x=0$; si, au contraire, le point (u) est idéal, le plan (9) est réel, c'est-à-dire qu'il possède une région simplement connexe, et indéfinie en tous sens, intérieure à $x=0$. Comme, du reste, l'équation (9) peut représenter un $(n-1)$-plan quelconque, on peut définir aussi les coefficients $u_1, u_2, \ldots, u_n$ du premier membre de cette équation comme les coordonnées (tangentielles) d'un $(n-1)$-plan. Or, si l'on considère le lieu limite $x=0$ et le plan quelconque (9) comme invariablement liés entre eux, le pôle (u) du plan devient, lui aussi, invariablement lié au lieu $x=0$; et puisque ce lieu ne fait que glisser sur lui-même lorsqu'il fait partie d'un système invariable mobile dans le n-espace, il est évident que le pôle (u) doit se déplacer, lui aussi, avec le système, et par suite que les variations $\delta u_1, \delta u_2, \ldots, \delta u_n$ des coordonnées tangentielles d'un $(n-1)$-plan, qui fait partie d'un système invariable mobile dans le n-espace, sont des fonctions de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de même forme que les $\delta x_1, \delta x_2, \ldots$, par rapport aux $x_1, x_2, \ldots$.

Cette conclusion peut être vérifiée directement, en tirant de l'équation (9)

$$\Sigma u_r \delta x_r + \Sigma x_r \delta u_r = 0,$$

savoir (7)

$$\Sigma c_r u_r + \Sigma_r \Sigma_i c_{ir} u_r x_i - \Sigma c_r x_r + \Sigma x_r \delta u_r = 0,$$

ou encore

$$\Sigma_r (\delta u_r - \Sigma_i c_{ir} u_i - c_r) x_r + \Sigma_i c_i u_i = 0.$$

La relation que cette formule établit parmi les $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ne peut évidemment différer de celle (9) dont on est parti; on aura donc

$$\frac{\delta u_r - c_r - \Sigma_i c_{ir} u_i}{u_r} + \frac{\Sigma_i c_i u_i}{a^2} = 0,$$

d'où

$$(7') \qquad \delta u_r = c_r + \Sigma_i c_{ir} u_i - \frac{u_r}{a^2} \Sigma_i c_i u_i,$$

pour $r = 1, 2, \ldots, n$. Ces n formules sont parfaitement semblables aux formules (7).

Si, pendant le mouvement élémentaire du système invariable, il y a quelque point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui reste immobile, les variations $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_n$ de ses coordonnées doivent être toutes $= 0$ à l'instant considéré; et partant on aura aussi, pour ce même point, $x \delta x = 0$, c'est-à-dire $\delta x = 0$, si l'on suppose que ce point ne se trouve pas à la limite $x = 0$. Or ces conditions, $x > 0$, $\delta x = 0$ donnent, à cause de (8),

$$\Sigma c_i x_i = 0,$$

et, par suite, les conditions $\delta x_r = 0$ donnent à leur tour

$$(10) \qquad c_{ir} + \Sigma c_{ir} x_i = 0, \quad r = 1, 2, \ldots, n,$$

équations qui entraînent la précédente.

Lorsqu'il existe un système de valeurs des $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant à ces n équations linéaires, il y a un point (réel ou idéal suivant qu'on a $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 < \text{ou} > a^2$) qui possède les caractères d'un *centre instantané de rotation*, et dont le $(n-1)$-plan polaire par rapport à $x = 0$ est un $(n-1)$-*plan instantané de glissement* (idéal ou réel suivant que le pôle est réel ou idéal).

Or le déterminant

$$\Sigma \pm c_{11} c_{22} \ldots c_{nn}$$

des équations (10) est, à cause de (6), égal à zéro ou à une quantité positive, généralement différente de zéro, suivant que le nombre n est impair ou pair. Donc :

Dans un n-espace de courbure constante, il existe toujours, lorsque n est pair, soit un centre réel instantané de rotation, soit un $(n-1)$-plan réel instantané de glissement pour chaque mouvement élémentaire (tout à fait général) de système rigide.

Dans un n-espace de courbure constante, lorsque n est impair, il n'existe, en général, ni centre de rotation ni $(n-1)$-plan de glissement pour chaque mouvement élémentaire de système rigide; mais, si le mouvement est tel qu'il y ait un centre instantané [ou un $(n-1)$-plan instantané], il y en a une infinité, formant une droite ou un faisceau.

Je m'arrête, pour le moment, à ces conclusions de nature absolument générale, dont le développement et la discussion me mèneraient d'ailleurs très-loin. J'ajouterai la simple remarque que la Cinématique ordinaire nous offre déjà, dans ses théorèmes fondamentaux, des exemples particuliers des propriétés générales qui précèdent. Elle nous apprend, en effet, que dans le plan il existe toujours un centre instantané de mouvement, tandis que dans l'espace à *trois* dimensions il n'existe pas, en général, de point analogue, ou, s'il en existe un, il y en a une infinité en ligne droite. Dans cet espace il existe toujours, au contraire, une droite instantanée, qu'on appelle *axe central* de mouvement : or ce fait s'accorde parfaitement avec les théorèmes précédents; car l'espace euclidien, lorsqu'on y considère la droite comme élément primitif (point analytique) est un n-espace de courbure constante, pour lequel n est pair et $=4$; il doit donc y avoir toujours un élément instantanément invariable, et cet élément, qui est dans ce cas une droite, est précisément l'axe central. Dans ce même cas de $n=4$ on a, comme on sait,

$$\Sigma(\pm c_{11} c_{22} c_{33} c_{44}) = (c_{14} c_{23} + c_{24} c_{31} + c_{34} c_{12})^2,$$

et, dans l'hypothèse particulière $c_{14} c_{23} + c_{24} c_{31} + c_{34} c_{12} = 0$, le

nombre des éléments invariables peut devenir infini. Cette condition répond, ainsi qu'on peut s'en assurer, à celle de la rotation (ordinaire) simple.

En adoptant, avec M. Schering, la dénomination d'espaces *gaussiens* et *riemanniens* pour les espaces de courbure constante dont la mesure de courbure est négative ou positive (respectivement), on voit que les résultats précédents se rapportent aux espaces gaussiens. Il y a une théorie tout à fait semblable pour les espaces riemanniens, et il sera facile au lecteur de la constituer d'après celle qui précède. Il n'y a pas de différence essentielle quant aux n-espaces pour lesquels n est impair; mais, lorsque n est pair, le centre de rotation et le $(n - 1)$-plan de glissement existent toujours *simultanément* à l'état réel, quel que soit le mouvement élémentaire. L'exemple le plus simple, tiré de la Cinématique ordinaire, est offert par le déplacement d'une figure sphérique sur sa propre sphère : il y a toujours alors un centre de rotation et, en même temps, un grand cercle de glissement (dont le centre est le pôle).

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

[DU]HAMEL (J.-M.-C.). — ÉLÉMENTS DE CALCUL INFINITÉSIMAL. 3ᵉ édition, revue et annotée par M. J. BERTRAND, Membre de l'Institut. 2 vol. in-8°. — Paris, Gauthier-Villars; 1874-1875. Prix : 15 fr.

Lorsque, après avoir terminé nos études élémentaires, nous avons [co]mmencé celle des Mathématiques spéciales, un des noms que [n]ous avons entendu prononcer le plus souvent et avec le plus de [re]connaissance par notre maître est certainement celui de M. Du[h]amel. On peut se faire une idée très-précise des mérites de M. Du[h]amel comme savant et comme inventeur : il suffit de lire les Mé[m]oires si parfaits, si achevés de forme qu'il a publiés, et qui sont [to]ut à fait dignes de celui qu'il reconnaissait comme son maître, [d]e Fourier. Mais l'influence considérable qu'il a exercée sur l'en[se]ignement n'est bien connue que de ses anciens élèves de l'École [P]olytechnique et de l'École Normale. M. Duhamel était un esprit [tr]ès-net, ayant horreur des raisonnements vagues, cherchant avant [to]ut la clarté et l'ordre dans l'exposition. Il avait beaucoup de goût [p]our toutes les questions d'enseignement, sur lesquelles il aimait à [c]auser longuement avec ses anciens élèves. Comme il avait ensei[g]né toutes les parties des Mathématiques, il avait réfléchi sur toutes, [e]t il avait conçu depuis longtemps le projet de publier des Élé[m]ents de Mathématiques s'étendant depuis l'Arithmétique et la [G]éométrie élémentaire jusqu'au Calcul infinitésimal et à la Méca[n]ique rationnelle. Ce dessein, il n'a pu le réaliser d'une manière [c]omplète et en temps utile que pour le Calcul infinitésimal et la [M]écanique rationnelle. L'Ouvrage sur les *Méthodes dans les Sciences [d]e raisonnement* contient sans doute, même si l'on se borne à la [p]artie mathématique, bien des vues justes et utiles; mais on peut [d]ire qu'il est arrivé trop tard, quand la bataille était gagnée, et que [s]es anciens élèves de l'auteur avaient défendu et introduit dans [t]outes les branches de l'enseignement beaucoup des méthodes de [l]eur maître.

De tous les Ouvrages de M. Duhamel sur l'enseignement, celui [q]ui a subi le plus de modifications dans ses éditions successives, [c]elui sur lequel sans doute l'auteur a le plus travaillé et qui est

arrivé aussi à la forme la plus parfaite nous paraît être le *Calcul infinitésimal*. Publié d'abord sous le nom de *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, c'est seulement dans les deux dernières éditions qu'il a pris la forme définitive que M. Bertrand a tenu à lui conserver dans cette nouvelle réimpression. Une analyse détaillée serait donc bien inutile; le lecteur nous permettra seulement quelques remarques sur le plan général suivi par M. Duhamel.

Au commencement de ce siècle, les sujets de recherche introduits dans la Science par la découverte du Calcul infinitésimal commençaient à s'épuiser, et, après avoir tiré parti de l'instrument nouveau que Newton et Leibnitz leur avaient transmis, les géomètres commencèrent à reporter plus qu'auparavant leurs pensées sur la route qu'ils avaient tracée, et à chercher un mode aussi rigoureux que possible d'exposition des Mathématiques élevées. C'est l'époque des tentatives célèbres de Lagrange, tentatives qui sont loin du reste de demeurer isolées et qui suscitent de nombreux imitateurs. C'est ainsi qu'Ampère cherche, en Mécanique, à donner une bonne démonstration du principe des vitesses virtuelles et une exposition satisfaisante des axiomes et des propositions fondamentales de la dynamique du point matériel; dans le Calcul infinitésimal, il apporte sa part à l'œuvre commune par un essai de démonstration de l'existence de la dérivée, essai qui devait du reste demeurer infructueux, comme cela a été démontré par les recherches les plus récentes. On a conservé dans le tome III de la *Correspondance sur l'École Polytechnique* la trace des efforts de Poinsot et une indication rapide du mode personnel d'exposition qu'il avait adopté dans ses leçons d'Analyse à l'École Polytechnique en 1815. Est-il nécessaire enfin de rappeler le nom de Cauchy, qui, dans ses Mémoires, dans ses Ouvrages et dans son enseignement, a été, sinon le prophète, au moins le précurseur d'un ordre nouveau, dans lequel on essaye de ne rien sacrifier de la rigueur des raisonnements.

Ces tentatives, celle au moins de Lagrange, ont pour base l'exclusion des infiniment petits. On se rappelle le titre de l'Ouvrage célèbre de Lagrange : THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES, *contenant les principes du Calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissants, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*. Aussi, sous l'influence puissante de Lagrange, l'emploi

de la méthode infinitésimale était presque universellement condamnée, si bien que, dans son éloge de Jacobi, Lejeune-Dirichlet fait un mérite au grand géomètre allemand d'avoir osé adopter cette méthode au début de sa carrière et d'avoir essayé de la relever du discrédit dans lequel elle était tombée.

C'est justement l'emploi des infiniment petits, concilié avec la rigueur dans les raisonnements, qui constitue le mérite du mode d'exposition auquel s'est arrêté M. Duhamel. De tout temps, il avait eu la plus grande admiration pour les créateurs de la méthode infinitésimale, et plusieurs de ses travaux consacrés à Roberval, Fermat, Descartes montrent avec quel soin il a étudié le développement de cette méthode, avant même Newton et Leibnitz, depuis Archimède. Son Ouvrage porte la trace de ces études profondes, et ses méthodes sont acceptées aujourd'hui, même par ceux des géomètres de l'école de Lagrange qui, sans bannir la méthode infinitésimale, en font l'emploi le moins étendu possible, pour lui substituer celle des limites et le calcul des dérivées.

Bien des Chapitres du *Calcul infinitésimal* seront transformés, bien des parties seront à refaire dans l'Ouvrage de M. Duhamel, comme dans tous ceux du même genre. Une portion du premier volume conservera toujours, selon nous, son intérêt, son utilité et sa valeur : c'est le Livre I qui est consacré à l'exposition et à des applications directes de la méthode infinitésimale proprement dite, et où l'auteur, en la séparant nettement des règles du Calcul différentiel et intégral, en fait mieux comprendre l'utilité et le véritable caractère. Cette distinction entre la méthode et les moyens de l'appliquer constitue le fondement même de l'Ouvrage, comme le fait remarquer l'auteur :

« Ainsi », dit-il en terminant sa Préface, « dans cet essai, que nous espérons rendre un jour moins imparfait, notre objet a été l'étude de la méthode infinitésimale considérée en elle-même, et les procédés si importants du Calcul différentiel et du Calcul inverse ont été les moyens d'exécution des opérations auxquelles cette méthode a ramené la solution des questions qu'elle s'est proposées. Cette subordination, que nous avons tenu à rendre bien explicite et bien sensible, donne la raison de l'ordre que nous avons suivi dans cet Ouvrage et du titre que nous lui avons donné. »

M. Bertrand, qui publie la nouvelle édition, s'est contenté d'a-

jouter des Notes tirées de son grand Traité et qui traitent de la théorie des fonctions de variables imaginaires, des intégrales définies prises entre des limites imaginaires et des éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Ainsi se trouve comblée une lacune que le temps avait produite dans une œuvre qui mérite de vivre et d'être proposée, pendant longtemps encore, comme guide aux élèves et aux maitres.

Au point de vue matériel, l'édition est tout à fait digne des précédentes et fait le plus grand honneur à M. Gauthier-Villars.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MÉMORIAL DE L'OFFICIER DU GÉNIE, ou Recueil de Mémoires, Expériences, Observations et Procédés propres a perfectionner la fortification et les constructions militaires, rédigé par les soins du Comité des Fortifications, avec l'approbation du Ministre de la Guerre. In-8°.

1re série. Tomes I à XV (1803-1848).
2e série. Tomes XVI à XXIV et suivants (1854-1875).

Cette publication, fondée par le général Marescot et rédigée par les soins et sous la direction du Comité des Fortifications, a pour objet « de développer l'art de l'ingénieur militaire, de propager l'instruction dans le corps du Génie et d'y établir un mode uniforme pour l'exécution et l'économie des ouvrages ».

Le *Mémorial*, « restreint aux généralités de la Science », ne renferme pas d'études historiques ou critiques, ni de description des places fortes de France et de l'étranger, ni d'études sur l'organisation administrative du service et du corps du Génie. C'est, avant tout et en résumé, un recueil technique, dans lequel se trouve exposé le détail des perfectionnements apportés à la théorie et à la pratique de la construction.

Les tomes I à XV inclusivement forment une première série; les tomes XVI et suivants, une deuxième série.

Ces divers volumes ont paru à des époques irrégulières, à quatre ou cinq ans d'intervalle; mais, depuis 1872, la publication semble

avoir pris plus d'importance et de rapidité et être entrée dans une voie nouvelle et féconde.

Les quinze premiers volumes (dont les deux premiers ont été réédités en 1821) renferment 143 articles ou Mémoires sur divers points de l'art des constructions. On en trouve :

18 sur l'équilibre ou la manœuvre des ponts-levis;

14 sur les manœuvres d'eau (barrage, épuisement, jaugeage, etc.);

10 sur l'emploi de divers matériaux de construction;

9 sur l'installation des cuisines, latrines, accessoires du casernement des troupes, etc.;

7 sur la poussée des terres;

6 sur chacun des sujets suivants : fours de campagne, charpente, profils de revêtement, défilement, instruments et méthodes de levers topographiques;

5 sur chacun des sujets suivants : poussée des voûtes, expériences sur les mines militaires, pratique de l'art de construire, pompes et moteurs hydrauliques, fondation des maçonneries;

4 sur les magasins à poudre;

3 sur l'armement des places, la construction des blindages, etc.;

2 sur l'hygiène.

Les autres Mémoires sont relatifs à des questions plus particulières (plantations, travaux de sape, blockhaus, collections de plans, etc., etc.).

Nous ne pouvons faire ici l'analyse d'une collection aussi étendue. Les Mémoires exclusivement mathématiques sont en très-petit nombre, et, bien qu'ils soient dus à des ingénieurs d'une grande autorité et d'une profonde expérience, il est juste de dire que les théories qu'ils renferment ont été modifiées depuis et basées sur des principes nouveaux.

Nous nous bornerons donc, pour la première série de ce Recueil, au résumé que nous venons de donner et qui nous parait traduire fidèlement l'esprit dans lequel s'est maintenue la rédaction du *Mémorial de l'Officier du Génie*.

La seconde série du *Mémorial*, très-différente, pour le fonds, de tous les numéros précédents, a commencé en 1854 par l'édition du tome XVI.

Nous croyons devoir indiquer les divers articles qui composent ces derniers volumes, en ne donnant que le titre de ceux qui n'ont

pas spécialement les Mathématiques pour objet. Nos lecteurs jugeront aisément, d'après cette analyse succincte, que l'utile publication du *Mémorial de l'Officier du Génie* se recommande aujourd'hui par une plus grande variété dans les sujets d'étude.

Tome XVI ; 1854 (2e série, t. I).

DENIÉPORT. — *Compte rendu sur la construction, en* 1847, 184 *et* 1849, *du pont de la Sorille à Sedan.* (38 p., 3 pl.)

GENET. — *Note sur les ponts-levis dits en zigzag.* (4 p., 1 pl.)

GENET. — *Notice sur les garde-corps des ponts-levis.* (21 p., 2 pl.)

SÉRÉ DE RIVIÈRE. — *Notice sur l'emploi de plans automoteurs dans la construction du fort du cap Brun, à Toulon.* (24 p., 2 pl.)

DENIÉPORT et JOURDAIN. — *Note sur un mode de réparation des escarpes employé à Sedan.* (4 p., 1 pl.)

FABRÉ. — *Notice sur la ferme funiculaire.* (15 p., 1 pl.)

CARLIER. — *Note sur l'emploi, aux fortifications de Paris, de la machine à écoperche pour le transport vertical des terres.* (12 p., 2 pl.)

SAINT-QUENTIN. — *Note sur la machine dite* écoperche double, *employée au terrassement de la place de Douai.* (8 p., 2 pl.)

COULAINE (DE). — *Note sur une nouvelle forge pour le ferrage des chevaux.* (4 p., 1 pl.)

VERDAL (DE). — *Note sur les précautions prises pour fixer les remblais du fort des Saumonards et les sables environnants.* (4 p.)

GAGEOT. — *Note sur le moyen employé pour exécuter économiquement les terrassements des glacis du fort Risban, à Calais.* (3 p.)

BICHOT. — *Notice sur la boussole topographique.* (18 p.)

GOULIER. — *Mémoire sur la stadia et sur les instruments servant, conjointement avec elle, au mesurage des distances.* (50 p., 2 pl.)

LAUSSEDAT. — *Mémoire sur l'emploi de la chambre claire dans les reconnaissances topographiques.* (42 p., 2 pl.)

GRASSET. — *Mémoire sur la mesure des surfaces et des volumes et sur la détermination de leurs centres de gravité, avec une application à la poussée des voûtes cylindriques.* (42 p., 1 pl.)

PARMENTIER. — *Note sur la comparaison des différentes méthodes d'approximation pour la quadrature des courbes.* (10 p., 1 pl.)

BAZIN. — *Résistance des panneaux à la balle de calibre.* (2 p.)

Tome XVII; 1864 (2e série, t. II).

LA GRÉVERIE (DE). — *Notice sur un appareil à plans inclinés employé au transport vertical des terres.* (24 p., 1 pl.)

Exposé des lois relatives aux courants électriques. (16 p., 1 pl.)
Résumé, d'après les Ouvrages de Physique, des lois et formules nécessaires à l'étude des Mémoires sur les applications de l'électricité.

BARISIEN. — *Mémoire sur l'application de l'électricité dynamique à l'inflammation des fourneaux de mine.* (44 p., 1 pl.)

COMPTE RENDU *des expériences sur un barrage à aiguilles verticales, exécuté en 1862 au pont sur la Moselle, à Thionville.* (17 p., 1 pl.)

LA GRÉVERIE (DE). — *Notice sur les revêtements avec voûtes en décharge.* (34 p., 1 pl.)

BLONDEAU. — *Expériences sur un ventilateur à force centrifuge.* (31 p., 1 pl.)

MARTIN (G.). — *Note sur un déblai de roc exécuté au fort du Roule, à Cherbourg, en 1851 et 1852.* (11 p., 1 pl.)

BENOÎT. — *Mémoire sur les appareils de chauffage et de ventilation construits à l'hôpital militaire de Vincennes.* (48 p., 4 pl.)

LAUSSEDAT. — *Mémoire sur l'application de la Photographie au lever des plans.* (64 p., 2 pl., 5 fig.)

Javary. — *Opérations photographiques.* (31 p., 5 fig.)

Klein. — *Mémoire sur l'électricité appliquée à l'inflammatio des fourneaux de mine.* (66 p., 2 pl.)

Tome XVIII; 1868 (2e série, t. III).

Coatpont (de). — *Mémoire sur les perspectives rayonnantes e t leur application au défilement.* (37 p., 1 pl.)

Peaucellier et Wagner. — *Mémoire sur l'amélioration de s ponts-levis et des entrées des places fortes.* (60 p., 3 pl.)

Compte rendu *des travaux de démolition par la mine, exécutés à Sébastopol, en 1855 et 1356, par le Génie militaire françai .* (47 p., 2 pl.)

Goulier. — *Mémoire sur le télémètre à prismes,* appareil don nant la distance au but pour le tir des bouches à feu et les recon naissances. (53 p., 1 pl.)

Peaucellier et Wagner. — *Mémoire sur un appareil diastim métrique nouveau, dit appareil autoréducteur.* (98 p., 3 pl.)

Tome XIX; 1872 (2e série, t. IV).

Barisien. — *Rectifications proposées à deux Mémoires e MM. les généraux Poncelet et Ardant sur la stabilité des reve tements.* (14 p., 1 pl.)

Morellet. — *Mémoire sur la question des démolitions par a mine.* (173 p., 2 pl.)

Bardonnaut. — *Note sur la mise du feu aux mines au moye n de l'électricité.* (52 p., 1 pl.)

Devèze et Barisien. — *Mémoire sur le pont-levis à contre-poid s constant avec spirales de la porte Randon, à Grenoble.* (33 p , 2 pl.)

Mangin. — *Mémoire sur un nouveau pont-levis à contre-poid s variables et à poulies mobiles.* (22 p., 1 pl.)

Varaigne. — *Mémoire sur la réparation des ponts de chemi n de fer.* (71 p., 3 pl.)

ON. — *Extrait d'une Note relative au choix des arbres des-*
à être débités en blindages et en palissades. (6 p., 1 pl.)
: même volume renferme une étude de ponts-levis à bascule
essous et à bras indépendants, d'après un type adopté par le
ité des Fortifications. (14 p., 2 pl.)
:s XIII Planches qu'il contient ont été obtenues à la lithopho-
ıphie du Dépôt des fortifications; celles des volumes précé-
s ont été gravées sur acier.
›us retrouvons encore des Planches de lithophotographie dans
olumes XX et suivants; mais, à partir du tome XX, le *Mémo-*
a été enrichi de nombreuses figures intercalées dans le texte
cilitant ainsi sa lecture et sa compréhension. Ce détail d'exé-
›n typographique a son importance, et ajoute aux qualités qui
nguent aujourd'hui cette publication, parmi tant d'autres qui
:nt, comme celle-là, des presses de la maison Gauthier-Villars.

ne XX; 1872 (2e série, t. V).

: tome XX (402 p., 115 fig. et 4 pl.) est entièrement consacré
:tude théorique et pratique des dynamites et de quelques pou-
brisantes dérivées de l'azote, par M. Fritsch, capitaine du
ie.
:tte monographie complète sera très-utilement consultée, en
›n de l'emploi, devenu plus fréquent, de la dynamite.

ne XXI; 1873 (2e série, t. VI).

:TIT. — *Effet du tir sur les ouvrages de Paris* (1870-1871).
:hes du fort d'Issy (63 p., 34 fig., 1 pl.)

:TIT et Vinclaire. — *Plan du bombardement de Paris.* (4 p.,
.)

:LTIER. — *Rupture des tunnels et des ponts entre Vernon et*
en, etc. (17 p., 13 fig.)

ıMBRUN. — *Effets des mines militaires.*
iscussion des formules de Lebrun. Nouvelles recherches théo-
es sur l'expression des effets souterrains de la poudre. (86 p.,
g.)

Dambrun. — *Recueil d'expériences sur les effets souterrains des fourneaux de mine.* (100 p., 69 fig.)

Suite du Mémoire ci-dessus.

Ricour. — *Mémoire sur les mines militaires.* (67 p., 4 pl., 32 fig.)

Description raisonnée et construction d'un abaque donnant la solution des questions relatives aux charges des fourneaux de mine, d'après les formules de Lebrun.

Guillemot. — *Figure donnant les charges de fourneaux quelconques.* (14 p., 2 fig., 1 pl.)

Delambre. — *Mémoire sur un manuel-memento du mineur, avec abaque, etc.* (40 p., 8 fig., 2 pl.)

Roulet. — *Étude d'une machine élévatoire.* (30 p., 2 fig., 1 pl.)

Cette machine est semblable à la fontaine de Héron; son rendement varierait de 30 à 39,5 pour 100.

Mangin (A.). — *Mémoire sur trois projets d'affûts à éclipse.* (21 p., 9 fig., 1 pl.)

Mangin (A.). — *Note sur un nouveau système de télégraphie optique.* (5 p.)

Tome XXII; 1874 (2ᵉ série, t. VII).

Grillon. — *Étude sur le casernement de la cavalerie en France.* (110 p., 52 fig.)

Peaucellier. — *Emploi du planimètre polaire de M. Amsler dans le dessin de la fortification.* (28 p., 12 fig.)

Théorie mathématique, très-intéressante et très-complète, de l'emploi de l'instrument imaginé par M. Amsler pour évaluer mécaniquement la surface d'une courbe plane et donner ainsi la solution d'autres problèmes qui dépendent du précédent, tels que la cubature de certains solides et la détermination de leur centre de gravité.

Cette étude, datée d'avril 1863, débute par des considérations générales sur l'utilité des méthodes expéditives pour la mesure des surfaces planes et des volumes quelconques; puis vient l'exposé

:s cinq ou six méthodes les plus usitées pour la quadrature des ırfaces ou la cubature des volumes. L'auteur décrit ensuite le planimètre polaire d'Amsler, plus simple et moins coûteux que le planimètre sommateur de M. Beurriée, employé par l'administration ı cadastre, et que le planimètre à cône de MM. Oppikoffer et rnst. Le planimètre d'Amsler est fondé sur le principe géométique suivant : Deux droites finies OA $= a$, AM $= b$, articulées ı A, forment un triangle variable OAM, dont le sommet O reste ce, tandis que le point M se meut suivant une courbe donnée de ıperficie S, enveloppant le point fixe O. Sur le prolongement RM : AM, à une distance constante AR $= \delta$, se trouve une roulette 'ant la droite AM pour axe.

Cela posé, la surface cherchée est égale à une quantité constante

$$\pi(a^2 + b^2 + 2b\delta),$$

ıgmentée d'un rectangle ayant pour base la ligne constante b et ›ur hauteur la quantité D, dont la roulette mobile s'est dévelop- :e en roulant sur le plan de la courbe, après le parcours total de courbe donnée par le point M.

Dans le cas d'une courbe extérieure par rapport au pivot fixe, superficie de la courbe décrite est égale à celle d'un rectangle 'ant pour base la longueur constante b et pour hauteur la quanté dont s'est développée la roulette mobile.

Le travail d'étude est terminé par l'indication des propriétés du animètre, permettant la détermination des centres de gravité des ırfaces et des volumes, celle des expressions de la forme

$$xy + x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$$

de l'aire d'un polygone défini par ses sommets.

M. Hirn vient de publier aussi une théorie analytique et élémenire du planimètre d'Amsler, dans laquelle il a signalé l'intéresnte application qu'il a faite de la roulette de ce planimètre comme talisateur à son pandynamomètre de torsion, qui permet d'enrestrer exactement le travail pendant des journées entières.

Richard (J.). — *Expériences faites en 1869 à l'École régimenıire d'Arras avec les pyrothèques et une nouvelle machine dyamo-électrique à basse tension.* (33 p., 1 pl.)

Rousset et Delambre. — *Études sur la fabrication des amorces à employer pour mettre le feu aux mines au moyen de l'électricité de tension.* (110 p., 57 fig.)

Barisien. — *Note sur la manœuvre du pont-levis à contre-poids constant avec spirales du colonel Devèze.* (14 p., 4 fig.)

Nous signalerons la proposition suivante : « Si une développante de cercle tourne autour du centre de ce cercle, l'extrémité d'un fil vertical, enroulé sur cette courbe, décrit une parabole. »

Percin. — *Notice théorique et pratique sur la manœuvre du pont-levis à contre-poids constant avec spirales du colonel Devèze.* (48 p., 24 fig.)

Curie. — *Note sur le réglage des ponts-levis.* (10 p.)

Poulain. — *Nouvel organe mécanique réciproque de transformation du mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.* (12 p., 1 fig.)

Ce nouvel organe peut être considéré comme une modification ingénieuse de la disposition de la balance de Roberval à plateaux supérieurs. Les tiges verticales qui portent ces plateaux sont guidées par des glissières et soutenues, par un galet, sur une rainure pratiquée à l'extrémité des bras du fléau. L'auteur arrive à un *rendement* de 0,995.

Javary. — *Mémoire sur les applications de la Photographie aux arts militaires.*

Intéressante question, dont Arago parait avoir été le promoteur. Ce Mémoire est divisé en deux Parties : 1° application de la Photographie aux levers. Nivellement. Reconnaissances. Panoramas, etc. 2° Reproductions photographiques. Précautions à prendre. Procédés opératoires. Stabilité des images, etc.

La Noë (A. de). — *Extrait d'une Note sur la reproduction des dessins au moyen du papier préparé au ferroprussiate de potasse.* (4 p.)

Fritsch. — *Les dynamites; suite au Mémoire inséré au n° 20 du Mémorial.* (39 p.)

N'oublions pas de dire que le volume que nous venons d'analyser est orné d'un remarquable *Portrait de Vauban,* par Ch. Le Brun.

Tome XXIII; 1874 (2e série, t. VIII).

Mangin (A.). — *Mémoire sur le système de télégraphie optique e la défense de Paris.* (45 p., 2 pl., 6 fig.)

Étude raisonnée des divers systèmes de télégraphie optique imanés par MM. Lissajous et Cornu, et perfectionnés par MM. Brion, aussedat et A. Mangin.

Notice sur la nouvelle carte de France à $\frac{1}{100000}$, dressée au Déôt des fortifications. (19 p.)

Grillon. — *Étude sur le casernement de l'infanterie en France.* 35 p., 49 fig.)

Continuation du travail d'ensemble commencé dans le tome XXII.

Wagner. — *Note sur une mire parlante spéciale imaginée par f. le garde du génie Marc pour lire directement les altitudes.*) p., 7 fig.)

Description d'une mire parlante employée, depuis quelques anées, à la brigade topographique.

Wagner. — *Des méthodes de levers en usage à la brigade pographique et de l'emploi d'un nouvel instrument (appareil omolographique de MM. Peaucellier et Wagner), destiné à subituer aux opérations habituelles des procédés purement mécaques.* (53 p., 1 pl., 6 fig.)

Description et emploi de l'*homolographe*, basé sur une propriété ı système articulé nommé depuis *élément* ou *inverseur* Peaucelor, qui a valu à son auteur une si juste célébrité.

Corbin. — *Mémoire sur les cuisines à vapeur.* (87 p., 1 pl., fig.)

Loyre. — *Note sur l'emploi des marmites thermostatiques chaufées par l'introduction de la vapeur d'eau.* (24 p., 7 fig.)

Morin (le Général). — *Note sur l'espace cubique et sur le olume d'air nécessaires pour assurer la salubrité des lieux abités.* (10 p.)

Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des ciences*, séance du 4 août 1873.

Fritsch. — *Les dynamites.* (224 p., 107 fig.)

Suite des Mémoires insérés au *Mémorial*, tomes XX et XXII.

T. XXIV; 1875 (2e série, t. IX).

Marcille. — *Notice sur le rétablissement du pont de Clerval (sur le Doubs) en janvier 1871.* (17 p., 6 fig.)

Marcille. — *Note sur la destruction du tunnel de Martainville en septembre 1870.* (8 p., 3 fig.)

Bailly-Maître. — *Mémoire sur la mise en place et le fonctionnement des barrages de la Moselle, à Thionville, pendant le blocus de 1870, et sur les améliorations dont ces systèmes de barrage sont susceptibles.* (36 p., 16 fig.)

Sadoux. — *Compte rendu des travaux de roctage exécutés au fort de la Croix-Faron, suivi d'observations relatives à l'emploi des dynamites et du coton-poudre comprimé.*

Curie. — *Nouvelles expériences relatives à la théorie de la poussée des terres.* (70 p., 16 fig.)

Nos lecteurs trouveront dans le *Bulletin* (t. II, p. 212; t. VI, p. 87) un résumé des Communications faites à l'Académie des Sciences par M. le commandant Curie et de la discussion des méthodes de MM. de Saint-Venant et Lévy.

L'auteur établit que les surfaces de rupture dans un remblai dépourvu de cohésion sont bien réellement planes et que, dans les terrains argileux, elles doivent être des cycloïdes, comme M. Collin l'a conclu de nombreuses observations, dans un Ouvrage qu'il a publié en 1846.

Peaucellier. — *Mémoire sur les conditions de stabilité des voûtes en berceau.* (54 p., 27 fig.)

Insuffisance des méthodes connues pour l'étude des conditions de stabilité des voûtes. Principe et méthode de vérification géométrique de la stabilité des voûtes en berceau. Résistance limitée de la matière, modifications qu'elle apporte à l'étude des conditions de stabilité d'une voûte et constructions à faire pour apprécier la stabilité d'une voûte donnée.

Goulier. — *Note sur les niveaux à collimateur.* (18 p., 14 fig.)

ILIER. — *Description raisonnée des mires de nivellement de le d'application de l'Artillerie et du Génie* (24 p., 36 fig.)

ILIER. — *Note sur une boussole nivelante en métal, organi- vue du service du Génie.* (30 p., 5 fig.)

ILIER. — *Note sur la lunette anallatique de M. Goulier.* ., 4 fig.)

ILIER. — *Note sur divers instruments de nivellement propres utilisés en campagne, et dont la plupart sont susceptibles improvisés au moment du besoin.*

ORD et GOULIER. — *Note sur le téléiconographe de MM. Ré- t Viollet-le-Duc.* (11 p., 2 fig.)

ISEIGNEMENTS *sur le poids des charges de dynamite Nobel à employer pour détruire des maçonneries.* (10 p.)
duit et extrait d'un Mémoire de M. le major Julius Vogl.

IONIQUE (le Général). — *Emploi de l'asphalte dans les con- ions militaires.* (13 p.)

IIE, DE LAPPARENT, HENNEBERT, MASSU, LOISY, DELACROIX, IN, LE BEURRIÉE, MERLIN (F.), VILLEBONNET. — *Notes di- sur l'art des constructions.* (31 p., 22 fig.) H. B.

EDINGS OF THE LITERARY AND PHILOSOPHICAL SOCIETY OF MANCHESTER.

e V (1865-1866).

KLE. — *Sur les corésolvants.* (2 p.)

FTON. — *Essai de description de tous les phénomènes ten- à ramener l'émission de la lumière à des principes mécani-* (5 p.)

KENDELL. — *Sur l'étoile variable* S *du Dauphin.*

puis la découverte de sa variabilité en 1863, l'auteur conclut ette étoile a eu un maximum d'éclat le 14 octobre 1863, la eur étant 8,5. Le maximum suivant a été observé le 12 sep- ·e 1864 : grandeur 8,3, et le troisième le 9 août 1865 : eur 8,9. L'intervalle moyen entre ces maxima est donc de

332 jours. Dans le n° 1523 des *Astronomische Nachrichten*, le Dr Schönfeld mentionnait une observation de cette étoile, faite le 8 septembre 1855 et notée de 9e grandeur; mais, n'ayant pu être répétée le 9 septembre ni le 20 novembre par Argelander, on dut la considérer comme douteuse. La discussion de cette observation conduit à cette conclusion qu'un maximum a dû se produire vers le 12 août 1855. En résumé, la période de cette étoile parait être de 331j,8.

La courbe de sa variabilité montre que son éclat croît beaucoup plus rapidement qu'il ne diminue. Lors de sa dernière observation, elle a passé de la 13e grandeur à son maximum en 48 jours, puis elle est revenue en 89 jours à sa grandeur initiale. Elle reste au-dessous de la grandeur 13,5 et invisible au télescope de puissance ordinaire pendant la moitié de sa période complète.

La couleur de cette étoile est nettement rougeâtre et se fonce à mesure que l'éclat diminue. C'est à la couleur de cet astre qu'il faut sans doute attribuer la différence de grandeur de 0,10 qui existe entre les observations de l'auteur et celles de M. Knott, qui plaçait aussi un maximum d'éclat le 11 août 1865, grandeur 8,8, tandis qu'il a dû se produire exactement le 9 août.

Brothers. — *Description d'un appareil de photographie céleste.* (18 p., 1 pl.)

Baxendell. — *Sur la variabilité de l'étoile* T *de l'Aigle* (3 p., 1 fig.)

L'auteur en avait annoncé la découverte le 12 novembre 1863. La période parait être de 152j,4. Époque du maximum, 24,1 janvier 1865.

Son éclat varie de 9,2 à 11,2. Le principal maximum a lieu 64 jours après le minimum; un second maximum a lieu 63 jours après le premier.

Baxendell. — *Sur la variabilité de l'étoile* S *de la Couronne.* (3 p., 1 fig.)

Découverte par Encke le 5 août 1860, et signalée dans le n° 1281 des *Astr. Nachrichten.*

Période moyenne, 357j,2; époque du maximum, 10,6 août 1863.

Knott. — *Sur la variabilité de l'étoile* R *du Petit Renard.* (10 p., 2 fig.)

Observée depuis 1803 par Piazzi Smyth, cette étoile varie de la grandeur 7,77 à la grandeur 13,14. Sa couleur est rose clair. Période $137^j,55$; époque du maximum, 17,5 juin 1864.

La courbe de sa variation d'éclat est très-régulière; le maximum se produit 66 jours après un minimum et $71^j,6$ avant le suivant.

Johnson. — *Sur la chambre pantoscopique* (10 p., 6 fig.)

Knott. — *Résultats de la comparaison des grandeurs d'étoiles indiquées dans les catalogues de Bedford et de Bonn.* (4 p.)

Baxendell. — *Sur une nouvelle étoile variable* R *de la Coupe.* (1 p.)

Tome VI (1866-1867).

Knott. — *Sur la grandeur combinée de deux étoiles en voisinage immédiat.* (2 p.)

Baxendell. — *Observations d'une nouvelle étoile variable* T *de la Couronne.* (5 p.)

Indication détaillée de ses changements de couleur et d'éclat. Cette intéressante étude peut être résumée ainsi qu'il suit :

Dates.	Grandeur.	Couleur.
1866. 15 mai	3,7	Blanche.
16 mai	4,2	Couleur de crème.
20 mai	6,2	Foncée.
21 mai	7,1	Plombée.
24 mai	7,7	Blanc mat.
29 mai	8,4	Jaune orangé terne.
25 juin	9,6	Jaune orangé.
26 juin	9,7	Orangé.
11 juillet	9,7	Jaune terne.
31 août	9,3	Jaune mat.
14 septembre	7,9	Jaune mat.
15 septembre	7,8	Jaune.
10 octobre	7,5	Jaune.
19 novembre	8,3	Rose orangé mat.

Les observations spectroscopiques n'ont pas encore permis de se prononcer sur la cause probable de ces variations singulières.

Schönfeld. — *Résultats d'observations d'étoiles variables faites à l'Observatoire de Mannheim.* (5 p.)

Indications sommaires sur 25 étoiles.

Baxendell. — *Éléments de l'étoile variable* R *de Persée.* (2 p.)

Période, 206j,8; époque moyenne, 10,7 août 1864, variant de la grandeur 8,7 à la 13e grandeur.

Knott. — *Sur l'étoile variable* R *du Petit Renard.* (1 p.)

Ransome (A.). — *Sur les conditions de l'action moléculaire.* (6 p.)

Hind. — *Éphémérides de 71 étoiles variables pour l'année 1867.* (3 p.)

Tome VII (1867-1868).

Brothers. — *De la couleur de la Lune durant les éclipses.* (3 p.)

Cockle. — *Mémoire sur l'évaluation des intégrales.* (2 p.)

« Les procédés que j'ai indiqués », dit l'auteur, « dans mon travail sur la conversion des intégrales (*Phil. Mag.*, Suppl., juillet 1867, p. 537), reposent sur l'application directe de la discussion des recherches de MM. Harley et Cayley à certains résultats auxquels Boole était déjà parvenu. Le présent Mémoire a pour objet de donner une forme plus générale et, peut-être aussi, un exposé plus lucide à une partie des méthodes employées dans l'Ouvrage précédent.

» Depuis, M. Harley et moi, nous avons été conduits, chacun de notre côté, à la généralisation d'un des résultats obtenus par Boole, qui consiste dans l'application des méthodes de ce géomètre à des formes d'équations trinômes différentes de celles qu'il avait discutées. Il est, d'ailleurs, juste de dire que la communication que m'a faite M. Harley à ce sujet renferme l'exposé de sa généralisation, la mienne pouvant alors servir de vérification à la sienne et, peut-être aussi, aux deux méthodes à la fois. »

Wilkinson. — *Sur divers points de la restauration des porismes d'Euclide.* (5 p.)

Réclamation de priorité en faveur de Simson. Extraits d'une correspondance à ce sujet entre Ch. Wildbore et John Lawson.

Birt. — *Sur une tache variable de la surface de la Lune.* (2 p.)

Réflexions sur les variations du cratère de Linné.

Schmidt. — *Note sur le sujet précédent.* (1 p.)

Dyer. — *Simples notes sur les lois des forces physiques.* (8 p.)

Kirkman. — *Note sur un essai de résolution des équations algébriques, par feu Hargreave.* (5 p.)

Rectifications au sujet de l'équation du cinquième degré.

Kirkman. — *Suite du même article.* (8 p.)

H. B.

ANNALES des Ponts et Chaussées (¹).

5ᵉ série. Tomes I à V (1871-1875).

Sous le titre d'*Annales des Ponts et Chaussées,* le service général des Ponts et Chaussées publie, tous les mois, un Recueil consacré aux « Mémoires et documents relatifs à l'art des constructions et au service de l'ingénieur : lois, décrets, arrêtés et autres actes concernant l'Administration des Ponts et Chaussées ».

Cette publication forme déjà quatre séries complètes, embrassant chacune dix années. Elle a commencé en 1831, et elle est placée sous le contrôle d'une Commission nommée par le Ministre des Travaux publics.

Chaque cahier mensuel, composé en général de dix à douze feuilles d'impression et de deux Planches ou cartes gravées, se divise en deux Parties. La première renferme les Mémoires et documents techniques; la seconde contient les lois et documents relatifs aux affaires administratives et litigieuses. Chacune de ces parties présente une pagination différente et suivie, pour que l'on puisse former chaque année trois volumes, savoir un volume de

(¹) In-8°. Paris, Dunod, éditeur, 49, quai des Augustins.

Mémoires et documents par semestre, et un volume des lois, décrets, etc., publiés durant l'année entière.

Une cinquième série est en cours de publication depuis l'année 1871. Elle renferme, comme les précédentes, d'intéressants Mémoires sur les applications des Mathématiques à l'art des constructions, et, pour ce motif, nous avons cru devoir présenter une analyse succincte de la partie technique de cette dernière série.

Tome I; année 1871.

Bazin. — *Étude comparative des formules nouvellement proposées pour calculer le débit des canaux découverts.* (34 p.)

Ces formules sont monômes ou binômes. Les premières, en raison de leur excès de simplicité, ne se prêtent pas à la représentation des phénomènes. On leur donne plus de généralité en admettant deux exposants fractionnaires et variables avec la nature de la paroi.

Les formules binômes se ramènent à deux types principaux : d'un côté, la formule des ingénieurs américains, MM. Humphreys et Abbot, de l'autre, les dérivées de la formule binôme admise par M. Darcy pour les tuyaux,

$$A = \frac{RI}{U^2} = \alpha + \frac{\beta}{R},$$

et étendue par M. Bazin aux canaux découverts

$$A = \alpha + \frac{\beta}{R\sqrt{I}},$$

U étant la vitesse moyenne, R la profondeur moyenne, I la pente moyenne.

Pierre. — *Note sur l'approximation sur laquelle on peut compter dans la méthode actuelle de calcul des poutres à plusieurs travées.* (7 p.)

Lechalas. — *Note sur les rivières à fond de sable.* (50 p.)

Michal. — *Deuxième Note sur le jaugeage des eaux courantes au moyen des déversoirs.* (11 p.)

Renoust des Orgeries. — *Mémoire sur les poutres droites.* (104 p., 1 pl.)

Conditions de maximum relatif de résistance. Mode correspondant de flexion et aperçu du parti qu'on peut en tirer pour le perfectionnement du calcul des moments fléchissants dans les poutres continues à section variable.

Tome II; année 1872.

DECOMBLE. — *Calcul des dimensions des dalles employées en couverture d'aqueducs.* (30 p., 1 pl.)

COLLIGNON. — *Note sur l'intégromètre de M. Marcel Deprez.* (14 p., 6 fig.)

Cet instrument est une extension du planimètre d'Amsler, et se compose essentiellement :

1° D'une règle OX, que nous prendrons pour axe des x, et le long de laquelle peut glisser librement un coulisseau A;

2° D'une tige rectiligne MAD, qui pivote librement autour du coulisseau A, et qui porte à l'une de ses extrémités M un style avec lequel on suit le contour de la figure donnée EMF; à l'autre extrémité elle porte un étrier dont les branches sont traversées par l'axe horizontal d'une roulette qui roule sur le plan de la figure.

Une disposition spéciale oriente à chaque instant l'axe dans une direction faisant avec la règle OX un angle β qui dépend, suivant une certaine loi, de l'inclinaison $\alpha = \text{MAX}$, prise par la tige.

L'instrument est muni enfin d'un tambour, d'un vernier et d'un disque totalisateur.

Cela posé, l'évaluation des aires sera donnée en prenant $\beta = \alpha$; la détermination du centre de gravité en prenant $\beta = 2\alpha + \frac{\pi}{2}$; et celle du moment d'inertie, en prenant $\beta = 3\alpha$.

En changeant les engrenages planétaires, qui rendent le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ égal à 2 ou à 3, on arriverait à déterminer des intégrales de la forme $\int y^{p-2n}\,dx$. M. Marcel Deprez a reconnu aussi que cet *intégromètre* pouvait servir à la résolution graphique des équations algébriques de degré quelconque.

CÉZANNE (DE). — *Relation d'un voyage aéronautique.* (22 p.)

Récit émouvant d'une périlleuse ascension aéronautique, tentée

le 2 novembre 1870, sur le *Fulton*, parti de la gare d'Orléans, pendant le blocus de Paris.

Lavoinne. — *Note sur la résistance des parois planes des chaudières à vapeur*. (27 p., 1 fig.)

Henry (F.). — *Description d'un ellipsomètre*. (11 p., 1 pl.)

Cet instrument est fondé sur les propriétés des roulettes décrites par les points d'un cercle qui roule dans un autre cercle de rayon double (Schooten et La Hire).

Les pièces de l'*ellipsomètre* réalisent précisément cette condition.

Pelletreau. — *Note sur le coefficient d'écrasement des matériaux*. (10 p., 1 pl.)

Considération sur l'influence de la forme et de la grandeur de la section.

Perrodil (de). — *Application des équations du problème général de la résistance des matériaux au problème de la stabilité d'une voûte d'épaisseur variable traitée comme un monolithe homogène*. (42 p., 1 pl.)

Poulet. — *Du soulèvement des poutres métalliques au-dessus des culées*. (31 p.)

Flamant. — *Note sur la poussée des terres*. (26 p., 1 pl.)

Essai de vulgarisation des idées de Macquorn Rankine.

Tome III; année 1873.

Stoecklin. — *Note sur les onglets*. (15 p., 1 pl.)

Détermination des arêtes et charnières de l'onglet d'une bande de papier, suivant lesquelles il faut la plier pour qu'une ligne donnée se place exactement sur une autre, un point de cette ligne venant se placer en un point donné.

Durand-Claye. — *Les pompes centrifuges simples et accouplées*. (23 p., 1 pl.)

Malézieux. — *Le service météorologique aux États-Unis*. (10 p., 1 c.)

Lefort. — *Théorie de l'intérêt composé et des annuités, d'après un Ouvrage de Fédor Thoman*. (54 p.)

Le but de cet article est de faire connaître l'Ouvrage de F. Thoman, d'en faciliter la lecture, et d'inspirer le désir de l'acquérir aux personnes qui sentiraient le besoin de profiter des Tables précieuses et peu volumineuses qu'il contient.

Cet Ouvrage porte pour titre : *Theory of compound interest and annuities, with logarithmic Tables*. London, Lockwood and C°, 1872.

Tome IV; année 1874.

MALÉZIEUX. — *Les chemins de fer anglais en* 1873. (159 p., 2 pl.)

GARIEL. — *Pressions dues à la congélation de l'eau; travaux de MM. Ch. Martins et Chancel.* (5 p.)

La force d'expansion de la glace a été signalée et prouvée dès 1667 par Huygens; plus tard (1784) Edwards Williams fit éclater des bombes remplies d'eau et soumises à des températures de — 19° à — 28°. MM. Martins et Chancel ont repris ces expériences et conclu de leurs recherches que la pression devait être de 433 à 574 atmosphères, et que le point de congélation de l'eau est abaissé de 1 degré pour 133 atmosphères.

LAVOINNE. — *De la répartition des charges sur les tabliers des ponts*. (38 p.)

Suite d'un Mémoire déjà publié en 1867, dans le même Recueil, sur la résistance des entretoises dans les portes d'écluse.

GARIEL. — *Grue flottante de* 100 *tonnes, construite à New-York par M. Isaac Newton*. (8 p., 1 pl.).

GARIEL. — *Les dynamites, par M. Fritsch, capitaine du Génie*. (13 p.)

Analyse du Mémoire composant le tome XX du *Mémorial de l'Officier du Génie*.

MALÉZIEUX. — *Fondations à l'air comprimé*. (73 p., 2 pl.)

HIRSCH. — *Théorie des machines aérothermiques*. (120 p., 1 pl.)

L'auteur étudie, sous ce nom, les machines qui fonctionnent d'après les principes suivants :

1° Emploi de l'air à haute température;

2° Emploi de régénérateurs de chaleur;

3° Combustion dans la machine même.

Exposé élémentaire des principes de la Thermodynamique; définition des *cycles* de Sadi Carnot.

Théorie des régénérateurs de chaleur et de leur application aux machines aérothermiques.

Des générateurs de pression.

Machines soufflantes.

Machines directes.

Machines marines.

Résumé. Le rendement théorique des machines aérothermiques est donné par la formule

$$\frac{q}{Q_1} = \eta = 1 - \frac{\tau_0}{\tau_1},$$

dans laquelle q désigne la chaleur transformée en travail; Q_1 la chaleur transmise au cylindre chaud; τ_0 la température absolue moyenne du cylindre froid; τ_1 la température absolue moyenne du cylindre chaud. La quantité de travail théorique produite est exprimée par $425\,\eta\,Q_1$.

FLAMANT. — *Traduction d'un Mémoire de Macquorn Rankine sur la stabilité de la terre sans cohésion.* Année 1856. (57 p.)

Théorie mathématique basée sur le seul principe suivant : « La résistance F au glissement, le long d'un plan donné, dans une masse granuleuse sans cohésion, est égale à la pression normale P qui s'exerce entre les deux parties de la masse situées de part et d'autre de ce plan, multipliée par une constante spécifique, tang φ, qui est le *coefficient de frottement.* » La solution de quelques problèmes exige en outre l'application du *principe de moindre résistance* de Moseley; mais le traducteur a désiré aussi démontrer qu'on peut ne pas avoir recours à ce dernier principe regardé comme contestable.

— Dans une Note complémentaire, M. BOUSSINESQ reprend la théorie de Macquorn Rankine et retrouve la formule fondamentale de son Mémoire, qui représente l'équation différentielle d'une *surface de poussée uniforme,*

$$\frac{d}{dH}(Gx - X) = \frac{d^2x}{dy^2},$$

X désignant la pression au point (x,y), G le poids de l'unité de volume du massif, H la somme de toutes les poussées horizontales supportées par les matières comprises entre la face supérieure d'une première couche et la face supérieure d'une couche quelconque.

Si θ est l'obliquité de la pression, cette équation et la suivante :

$$X\frac{dx}{dH}\cos^2\varphi = \left(1 + \sqrt{\sin^2\varphi - \frac{dx^2}{dy^2}\cos^2\varphi}\right)^2$$

résolvent complétement le problème. Rankine a admis, pour faciliter l'intégration, la relation suivante :

$$X = F(H) + \Phi(y).$$

M. Boussinesq discute cette hypothèse et montre qu'elle ne s'accorde pas entièrement avec les faits : « Peut-être trouvera-t-on un jour quelque ordre de phénomènes auquel l'hypothèse considérée serait plus applicable, et qui réaliserait ainsi cette curieuse analogie d'une distribution de pressions avec le mouvement de la chaleur dans une barre. »

CHORON. — *Calcul des moments fléchissants et des flèches dans les poutres droites métalliques à plusieurs travées.* (64 p., 1 pl.)

THOYOT. — *Détermination du nombre minimum de freins à introduire dans les trains.* (33 p., 4 pl.)

CÈTRE. — *Appareil hélicoïdal des voûtes biaises à section droite circulaire.* (21 p., 1 pl.)

Tome V; année 1875.

BOUVIER. — *Calculs de résistance des grands barrages en maçonnerie.* (34 p., 1 pl.)

Application des formules au barrage de Thernay.

Considérations sur la détermination d'un profil-type.

BAZIN. — *Discussion des expériences les plus récentes sur la distribution des vitesses dans un courant.* (42 p., 2 pl.)

On admet généralement que les vitesses sur une même verticale varient comme les ordonnées d'une parabole : la plus grande vitesse V est, tantôt à la surface, tantôt au-dessous, sans que l'on ait pu jusqu'ici se rendre bien compte des causes qui font varier

sa position. D'après cette loi parabolique, la vitesse v en un point donné d'une verticale se déduit de sa profondeur H par la formule très-simple

$$v = V - M\left(\frac{h-h'}{H}\right)^2,$$

dans laquelle h' désigne la distance du sommet de la parabole à la surface, H la profondeur totale, M un paramètre.

Dans des expériences en petit, M. Bazin a été conduit à donner à ce paramètre la valeur $M = 20\sqrt{HI}$, I désignant la pente du canal. L'équation de la parabole devient alors

$$v = V - 20\sqrt{HI}\left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^2$$

ou

$$v = V - 20\sqrt{HI}\,x^2,$$

suivant que la vitesse maximum était observée au-dessous de la surface ou à la surface même.

L'auteur discute ensuite les résultats des expériences faites en Europe sur de grands cours d'eau; celles de MM. Humphreys et Abbot sur le Mississipi et de M. R. Gordon sur l'Irrawaddi.

Piarron de Mondésir. — *Théorie de la locomotive sans foyer.* (14 p.)

Il s'agit d'un moteur très-ingénieux, inventé par M. le Dr Lamm, et appliqué à la traction de tramways en Amérique. Cette locomotive sans foyer consiste en un récipient d'eau surchauffée, qui fournit de la vapeur saturée, dont la température et la pression vont naturellement en diminuant.

Dans les éléments de travail pris pour exemple, l'auteur arrive à cette conclusion que, pour atteindre la vitesse de 25 kilomètres à l'heure, l'appareil devrait pouvoir vaporiser 1000 kilogrammes d'eau par heure, c'est-à-dire le neuvième du poids d'eau nécessaire à la remorque d'un train de 50 tonnes, sur un chemin de fer à voie étroite, dont les accidents du profil en long équivaudraient à une rampe continue de 0,0036.

Hirsch. — *Machines aérothermiques.* (5 p.)

ınse à une réclamation de priorité. Nous en signalerons le suivant :

ı n'est pas d'accord, jusqu'à présent, sur les fonctions des ·ateurs de chaleur : un grand nombre de savants fort auto-ːnient à ces appareils toute espèce de valeur et d'utilité; s, au contraire, en admettent l'efficacité dans certains cas liers. Briot et Verdet prouvent que, par l'emploi des régé-ırs, les machines de Stirling et d'Ericsson sont théorique-›arfaites; M. l'inspecteur général Combes est arrivé à la onclusion pour la machine de Franchot; mais, en dehors de particuliers, je ne sache pas que l'on ait démontré l'efficacité énérateurs : c'est ce que je me suis efforcé de faire, et je crois ȇussi à démontrer que toute machine à air chaud, munie générateur de chaleur convenable, est théoriquement par-; présente un coefficient économique égal à celui du cycle not. Cette démonstration et l'étude du jeu de la chaleur s régénérateurs sont les bases de mon travail. La théorie des eurs de pression n'en est qu'une application spéciale, un t à fait particulier. »

H. B.

ʅI C. K. Towarzystwa naukowego Krakowskiego (1).

e. Tome VII; 1862.

awski (Th.). — *Adam Kochański et ses écrits mathé-es.* (9 p.)

ı Adamandy Kochański, jésuite, connu dans l'Europe occi- sous le nom de Polono-Dobriniacus, professeur de Mathé-es à Mayence (1659), au Collége des Jésuites à Florence

---

nales de la Société I. et R. des Sciences de Cracovie.
'nales de la Société scientifique de Cracovie, publiées en langue polonaise, à l'heure actuelle trois séries de vingt volumes chacune, dont la moitié est aux Sciences. Nous donnons ici un court aperçu des articles mathématiques dans les six derniers volumes qui nous sont parvenus.
le commencement de l'année 1873, cette Société s'est transformée et a pris *'Académie des Sciences de Cracovie.*

(1667), à Olmütz (1677), et enfin conservateur de la bibliothèque de Jean Sobieski à Varsovie (où il est mort vers 1690), a laissé plusieurs écrits mathématiques, dont les principaux sont :

Analecta mathematica, sive theoreses mechanicæ de natura machinarum fundamentalium;

Et *Mirabilia chronometrica,* dont Schott parle avec beaucoup d'éloge ([1]).

On lui doit la rectification approchée de la circonférence à l'aide d'une construction géométrique, pouvant être traduite par la formule

$$\frac{1}{2}\,\text{circ.} = \sqrt{(2\,\mathrm{R})^2 - (3\,\mathrm{R} - \mathrm{R}\,\mathrm{tang}\,30^\circ)^2} = 3,141533\ldots \times \mathrm{R}.$$

ŻEBRAWSKI (Th.). — *Nouvelle solution du problème de la trisection de l'angle.* (14 p.)

Soit un angle ABC extérieur à un triangle BCD ([2]) et une circonférence quelconque ayant son centre O sur le côté BC et tangente en M et N aux côtés AD et DC. L'angle $\mathrm{BCD} = \frac{\mathrm{ABC}}{3}$; pour trouver le tiers de ABC, il suffit donc de connaître un des points D ou C.

Le premier se trouve sur une courbe de forme parabolique, dont l'équation par rapport à OB, prise pour l'axe des x avec O pour origine, est $x = \frac{y^2 - 2}{\sqrt{4 - y^2}}$; le dernier sur une autre courbe qui, rapportée à AD, prise pour l'axe des x avec M pour origine, a pour équation $x = \frac{3y - y^2}{\sqrt{4y - y^2}}$ (le rayon de la circonférence étant égal à l'unité).

Les paramètres de ces courbes étant indépendants de la grandeur de l'angle ABC, un gabarit tracé suivant une de ces courbes peut donc servir pour tous les angles donnés. Au point de vue pratique, c'est un avantage que ni la conchoïde ni la cissoïde ne possèdent.

([1]) Plusieurs autres dissertations sont insérées dans les *Acta eruditorum*, de Leipzig.

([2]) Le lecteur est prié de faire la figure.

Tome X; 1866.

KUCZYŃSKI (E.). — *Nouveau thermographe métallique.* (29 p., 1 pl.)

Cet instrument est fondé sur le principe connu de l'inégalité de dilatation de deux métaux (fer et laiton), appliqué aux balanciers de pendules, avec la disposition inverse de tiges. L'allongement total est alors la somme des dilatations partielles et peut être encore amplifié par un système de leviers. Les variations de température sont notées automatiquement sur une feuille roulante, à l'aide d'un mécanisme semblable à celui des marégraphes.

L'auteur insiste sur les avantages de cet instrument, dont les dimensions restreintes ($1^m,50$ de hauteur) permettent d'étudier la température d'une couche d'air assez mince et rendent son installation facile, et qui fournit des indications très-peu affectées par les erreurs dues à la dilatation de l'édifice auquel il est fixé; ce qui n'a pas lieu pour les thermographes métalliques formés d'une seule tige, qui nécessairement doit être très-longue.

KARLIŃSKI. — *Observations des petites planètes* (84) *et* (85) (*Clio et Io*) *à l'Observatoire de Cracovie.*

Calcul de la déclinaison et de l'ascension droite de ces planètes.

Tome XII; 1867.

ZAJĄCZKOWSKI (W.). — *Contribution à la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.* (8 p.)

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ une fonction de plusieurs variables, où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont des valeurs qui rendent f maximum ou minimum. En posant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_\lambda \, \partial x_\mu} = A_{\lambda,\mu},$$

l'auteur démontre que la fonction donnée sera minimum, ou maximum, selon que toutes les racines de l'équation

$$(a) \qquad \begin{vmatrix} A_{1,1}-\rho & A_{1,2} & \ldots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2}-\rho & \ldots & A_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \ldots & A_{n,n}-\rho \end{vmatrix} = 0$$

[illegible] de signes.

[illegible]

[illegible]

[illegible] — [illegible]

[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] par les rela-[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] caustiques. [illegible] des rayons vec-[illegible] polaires.

[illegible] — *Sur des microscopes et des télescopes diffé-[illegible] actuellement en usage.* [illegible] p.

L'auteur propose d'augmenter le grossissement de ces instruments par l'adjonction convenable d'un système de lentilles [illegible]. Il a obtenu, en modifiant ainsi un microscope ordinaire, des grossissements atteignant 80000 diamètres.

Zucchi (L.). — Du contact des circonférences et des sphères. (24 p.)

Solution générale du problème de contact d'un cercle avec trois autres et d'une sphère avec quatre sphères données.

(¹) Ce Mémoire a été publié aussi en italien, dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, 1867-1868. — Voir *Bulletin*, t. I, p. 311.

Tome XIX ; 1871.

Zajączkowski (W.). — *Contribution à la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre.* (17 p.)

Dans son Ouvrage intitulé : *Treatise on differential equations,* 1875, Boole ramène l'intégration d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$dx_{n+1} = A_{1,1}\,dx_1 + A_{2,1}\,dx_2 + \ldots + A_{n,1}\,dx_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$dx_{n+p} = A_{1,p}\,dx_1 + A_{2,p}\,dx_2 + \ldots + A_{n,p}\,dx_n;$$

mais il ne donne qu'indirectement le moyen d'intégrer ce système.

M. Zajączkowski démontre que le système d'équations ci-dessus, dont le type peut être mis sous la forme

$$dy_k = \sum_{i=1}^{i=n} A_{i,k}\,dx_i, \quad (k = 1, 2, 3, \ldots p),$$

où le nombre $n+p$ des variables surpasse le nombre p des équations de plus d'une unité, est intégrable sous la forme de p équations finies avec n constantes arbitraires, toutes les fois que les coefficients $A_{i,k}$ satisfont à $p\dfrac{n(n-1)}{1.2}$ conditions de la forme

$$\frac{\partial A_{r,k}}{dx_s} - \frac{\partial A_{s,k}}{dx_r} + \sum_{l=1}^{l=p}\left(A_{s,l}\frac{\partial A_{r,k}}{\partial y_l} - A_{r,l}\frac{\partial A_{s,k}}{\partial y_l}\right) = 0,$$

où il faut substituer pour r et s toutes les combinaisons des nombres $1, 2, 3, \ldots n$, et pour k les nombres consécutifs $1, 2, \ldots, p$.

Zajączkowski (W.). — *Des intégrales singulières des équations différentielles ordinaires du premier ordre.* (15 p.)

Les caractères des intégrales singulières établis par Cauchy et ensuite par Boole conduisent à la recherche d'une intégrale définie, dont on ne peut pas toujours effectuer le calcul. Il est cependant facile de déduire du caractère de Cauchy un autre caractère plus

simple qui n'exige aucune intégration. Tel est l'objet de ce Mémoire, dont le résultat peut s'énoncer ainsi :

Soit $u = f(x,y) = 0$ une intégrale de

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x,y);$$

il faut et il suffit, pour que u soit une intégrale singulière, que l'on ait

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y} = \infty, \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \frac{\pm 1}{\varphi(x,y)}}{\partial x} = \infty.$$

Ces conditions ont été déduites encore par Laplace du caractère d'Euler; mais de sa déduction on pouvait seulement conclure qu'elles étaient nécessaires : il restait à démontrer qu'elles sont suffisantes. A. P.

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITÄT ZU GÖTTINGEN (¹).

Année 1873.

RÉTHY (M.). — *Sur un principe de dualité dans la Géométrie de l'espace.* (6-11).

SCHERING (E.). — *Lignes, surfaces et figures d'ordres supérieurs dans les espaces à n dimensions de Gauss et de Riemann.* (13-21).

QUINCKE (G.). — *Sur la diffraction de la lumière.* (22-32).

LISTING (J.-B.). — *De l'état actuel de nos connaissances sur la forme et la grandeur de la Terre.* (33-98) (²).

BRILL (A.) et NOETHER (M.). *Sur les fonctions algébriques et leur emploi en Géométrie.* (116-132).

§ 1. Le théorème de l'équivalence. — § 2. Groupes de points particuliers. Caractère d'invariant des courbes φ. Théorème sur le genre.

(¹) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 276.

(²) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 241.

— § 3. Systèmes de points spéciaux dans le plan. — § 4. Le théorème de Riemann et de Roch. — § 5. Application à la réduction aux formes normales des courbes à modules généraux.

SCHERING (E.). — *La force de la pesanteur dans les espaces à n dimensions de Gauss et de Riemann.* (149-159).

MINNIGERODE (B.). — *Sur la distribution en genres des formes quadratiques à coefficients et à variables complexes.* (160-180).

ENNEPER (A.). — *Remarques sur l'enveloppe d'une surface sphérique.* (217-248).

NOETHER (M.). — *Sur les fonctions algébriques;* 5[e] Note (1). *Deux nouveaux critériums de la correspondance uniforme des surfaces algébriques.* (248-254).

KOHLRAUSCH (F.). — *Sur l'équivalent électrochimique de l'eau.* (262-264).

KLINKERFUES (W.). — *Sur une grande pluie d'étoiles filantes dans l'année* 524 *après J.-C., et sa relation probable avec la comète de Biela et celle de l'année* 1162. (275-296).

MAYER (A.). — *Sur l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre.* (299-310).

I. Extension donnée par Lie à la méthode de Cauchy. — II. Sur une imperfection des nouvelles méthodes d'intégration et sur un moyen d'y remédier.

STURM (R.). — *Le problème de la projectivité dans l'espace.* (311-320).

KLINKERFUES (W.). — *Sur les systèmes d'étoiles fixes, leurs parallaxes et leurs mouvements. Communication préliminaire.* (339-362).

QUINCKE (G.). — *Nouvelle méthode pour étudier les divisions d'un cercle.* (411-414).

VOSS (A.). — *Note concernant la transformation uniforme des courbes planes.* (414-417).

---

(1) Voir *Nachrichten*, 1869, n° 15; 1871, n° 9; 1872, n° 25, et la Note ci-dessus rédigée en commun par l'auteur et M. Brill. — *Bulletin*, t. I, p. 239; t. IX, p. 187 et 279.

Voss (A.). — *Sur la Géométrie des surfaces.* (418-420).

Enneper (A.). — *Remarques sur les surfaces orthogonales.* 2e Note (¹). (423-437).

Bjerknes (C.-A.). — *Notices historiques sur le problème de Dirichlet concernant la sphère et l'ellipsoïde* (439-447).

Bjerknes (C.-A.). — *Généralisation du problème de l'ellipsoïde en repos dans un fluide indéfini en mouvement.* (448-460).

Klinkerfues (W.). — *Addition à la méthode de détermination de la parallaxe au moyen des radiants.* (460-462).
Voir le Mémoire ci-dessus du même auteur.

Riecke (Ed.). — *Sur la loi fondamentale de Weber concernant l'action mutuelle électrique, dans son application à l'hypothèse unitaire.* (536-543).

Voss (A.). — *Sur la géométrie des figures de lignes de Plücker.* (544-551).

Du Bois-Reymond (P.). — *Sur les séries de Fourier.* (571-584).
Sur la possibilité de représenter les fonctions continues par les séries de Fourier. — Sur les conditions de possibilité de la représentation d'une fonction par les séries de Fourier.

Voss (A.). — *Sur la géométrie des surfaces focales des congruences.* (611-618).

Minnigerode (B.). — *Sur une nouvelle méthode pour résoudre l'équation de Pell.* (619-652).

Schering (E.). — *Théorie d'Hamilton et Jacobi pour les forces, dont la mesure dépend du mouvement des corps.* (744-753).

Lüroth (J.). — *Sur le calcul des* Würfe. (767-779).
Voir, pour la signification de l'expression *Wurf*, v. Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, § 19 et suiv.

(¹) Voir *Nachrichten*, 1872, p. 226. — *Bulletin*, t. IX, p. 278.

HATTENDORFF (K.). — *Remarques sur le théorème de Sturm.* (779-784).

ENNEPER (A.). — *Remarques sur la théorie générale des surfaces.* (785-804).

BJERKNES (C.-A.). — *Généralisation du problème des mouvements produits par le mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide non élastique en repos.* 1er et 2e Mémoire. (829-867).

Année 1874.

KOHLRAUSCH (F.). — *Sur la thermo-électricité et sur la conductibilité thermique et électrique.* (65-86).

1. Loi des forces thermo-électromotrices. — 2. Développement de la chaleur de Peltier. — 3. Réaction du courant thermique sur un courant électrique lié avec lui. — 4. Conséquence du principe de la conservation de l'énergie. Exception à la loi de Joule. — 5. Déplacement du rang thermo-électrique des métaux par la température. — 6. Sur le travail et la conductibilité de la chaleur. — 7. Sur les forces de contact de Volta et le développement de la chaleur de Peltier.

ENNEPER (A.). — *Remarques sur les recherches de Géométrie analytique.* (125-127).

ENNEPER (A.). — *Sur quelques théorèmes concernant les surfaces de second degré.* (127-151).

FROMME (C.). — *La fonction magnétisante d'une sphère de fer doux.* (165-171).

THOMAE (J.). — *Formation d'une équation différentielle intégrable, au moyen de la méthode de la différentiation à indice quelconque de Liouville.* (249-267).

SCHUBERT (H.). — *Les caractéristiques des courbes planes du troisième ordre dans l'espace.* (267-283).

BJERKNES (C.-A.). — *Généralisation du problème des mouvements produits par le mouvement d'un ellipsoïde, dans un fluide non élastique en repos.* 3e Mémoire. (285-316).

I. Généralisation et variation de la fonction ψ_e. — II. Mouve-

ment de translation. — III. Mouvement de rotation. — IV. Changement de forme avec conservation du volume. — V. Changement de volume avec conservation de la similitude. — VI. Mouvements composés ; remarques finales.

Mayer (A.). — *Sur les transformations de contact de Lie.* (317-331).

Voss (A.). — *Sur les complexes et les congruences.* (375-378) (¹).

Enneper (A.). — *Sur un problème de Géométrie.* (474-485).

Lie (S.). — *Sur les groupes de transformations.* (529-542).

Riecke (Ed.). — *Sur les lois de l'induction voltaïque.* (657-664).

I. Force électromotrice d'éléments de courant en repos et d'intensité variable. — II. Force électromotrice d'un élément de courant d'intensité constante, agissant sur un point d'un conducteur en mouvement.

Riecke (Ed.). — *Sur le mouvement moléculaire de deux particules, dont l'action mutuelle est régie par la loi de Weber sur la force électrique.* (665-672).

Année 1875.

Kohlrausch (F.). — *Sur la réaction élastique.* (41-49).

Mittag-Leffler (G.). — *Démonstration de ce théorème de Cauchy : « Si une fonction $f(x)$, en chaque point pris à l'intérieur ou sur le parcours d'une ligne fermée ne se coupant pas elle-même, n'ayant pas une infinité de points anguleux et située dans le plan de la variable complexe x, reste toujours uniforme, continue et finie, et si, en chacun de ces points, elle a une dérivée finie et déterminée, l'intégrale $\int f(x)dx$ prise le long de cette ligne est nulle.* (65-73).

Voss (A.). — *Sur un problème fondamental de la Géométrie plückérienne.* (101-123).

1. Introduction. — 2. Sur un principe de coordination des

(¹) Par une erreur de pagination, les pages qui devraient porter les nos 381-404 sont numérotées 371-394. La dernière page du Mémoire de M. Voss devrait avoir le no 38[illegible].

droites relativement aux *complexes spéciaux*. — 3. Droites doubles et discriminant d'un complexe. — 4. De la représentation d'une forme géométrique à l'aide d'un complexe. — 5. Sur les équations différentielles de certains complexes spéciaux. — 6. Méthode des complexes polaires.

Enneper (A.). — *Remarques sur la flexion de certaines surfaces*. (129-162).

Fromme (C.). — *Recherches sur le magnétisme des barreaux d'acier*. (297-308).

Himstedt (F.). — *Sur les oscillations d'un aimant sous l'influence retardatrice d'une sphère de cuivre*. (308-325).

Koenigsberger (L.). — *Relations entre les modules de périodicité de deux intégrales hyperelliptiques*. (327-333).

Schubert (H.). — *Les treize dégénérescences et les nombres fondamentaux des courbes planes du troisième ordre à point de rebroussement*. (359-387).

Tonelli (A.). — *Sur la théorie de la connexion*. (387-390).

Enneper (A.). — *Table des fonctions symétriques de poids* XI, *par M. le professeur Faà de Bruno*. (390-393).

Fromme (C.). — *Note sur le maximum du magnétisme temporaire dans le fer doux*. (500-502).

Tonelli (A.). — *Sur la fonction potentielle dans un espace à n dimensions*. (521-552).

Fuchs (L.). — *Sur les équations différentielles linéaires du second ordre qui ont des intégrales algébriques, et sur une nouvelle application de la théorie des invariants*. (568-581).

MÉLANGES.

SUR LA THÉORIE DES NOMBRES ENTIERS ALGÉBRIQUES;

PAR M. R. DEDEKIND.

INTRODUCTION.

En réponse à l'invitation que l'on m'a fait l'honneur de m'adresser, je me propose, dans le présent Mémoire, de développer les *principes fondamentaux* de la théorie générale, échappant à toute exception des nombres entiers algébriques, principes que j'ai publiés dans la seconde édition des *Leçons sur la Théorie des nombres* de Dirichlet. Mais, à cause de l'étendue extraordinaire de ce champ de recherches mathématiques, je me bornerai ici à poursuivre un but unique, que je vais essayer de définir clairement par les remarques suivantes.

La théorie de la divisibilité des nombres, qui sert de fondement à l'arithmologie, a déjà été établie par Euclide dans ce qu'elle a d'essentiel; du moins, le théorème capital que tout nombre entier composé peut toujours se mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme d'un produit de nombres tous premiers, est une conséquence immédiate de ce théorème démontré par Euclide ([1]), qu'un produit de deux nombres ne peut être divisible par un nombre premier que si celui-ci divise au moins l'un des facteurs.

Deux mille ans plus tard, Gauss donna, pour la première fois, une extension à la notion du nombre entier; tandis que, jusqu'à lui, on ne désignait sous ce nom que les nombres $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, que j'appellerai dans tout ce qui va suivre nombres *entiers rationnels*, Gauss introduisit ([2]) les nombres *entiers complexes*, de la forme $a + b\sqrt{-1}$, a et b désignant des nombres entiers rationnels quelconques, et il démontra que les lois générales de la divisibilité de ces nombres sont identiques avec celles qui régissent le domaine des nombres entiers rationnels.

La plus haute généralisation de la notion du nombre entier con-

---

([1]) *Éléments*, VII, 32.

([2]) *Theoria residuorum biquadraticorum*, II; 1832.

siste dans ce qui suit. Un nombre θ est dit un nombre *algébrique*, lorsqu'il satisfait à une équation

$$\theta^n + a_1\theta^{n-1} + a_2\theta^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\theta + a_n = 0,$$

de degré fini n et à coefficients rationnels $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$; il est dit un nombre *entier algébrique*, ou plus brièvement un nombre *entier*, lorsqu'il satisfait à une équation de la forme ci-dessus, dans laquelle les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont tous des nombres entiers rationnels. De cette définition il résulte immédiatement que les sommes, les différences et les produits de nombres entiers sont tous aussi des nombres entiers; par suite, un nombre entier α sera dit *divisible* par un nombre entier β, si l'on a $\alpha = \beta\gamma$, γ étant également un nombre entier. Un nombre entier ε s'appellera une *unité*, lorsque tout nombre entier quelconque sera divisible par ε. Par analogie, on devrait entendre par nombre *premier* un nombre entier α qui ne serait pas une unité, et qui n'aurait pour diviseurs que les unités ε et les produits de la forme εx; mais il est facile de reconnaître que, dans le domaine de tous les nombres entiers que nous considérons ici, il n'existe pas de tels nombres premiers, puisque tout nombre entier qui n'est pas une unité peut toujours être mis sous la forme d'un produit de deux facteurs ou plutôt d'un nombre quelconque de facteurs, qui sont tous des nombres entiers, mais non des unités.

Toutefois, l'existence des nombres premiers et l'analogie avec les domaines des nombres entiers rationnels ou complexes commence à se montrer de nouveau, lorsque du domaine de tous les nombres entiers on sépare une partie infiniment petite, de la manière suivante. Si θ est un nombre algébrique déterminé, parmi les équations à coefficients rationnels, en nombre infini dont θ est racine, il y en a une et une seule,

$$\theta^n + a_1\theta^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\theta + a_n = 0,$$

qui est de degré moins élevé que toutes les autres, et que l'on nomme à cause de cela *irréductible*. Si $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ désignent des nombres rationnels pris à volonté, tous les nombres de la forme

$$\varphi(\theta) = x_0 + x_1\theta + x_2\theta^2 + \ldots + x_{n-1}\theta^{n-1},$$

dont nous représenterons le complexe par Ω, seront aussi des nombres algébriques, et ils jouiront de la propriété fondamentale

que leurs sommes, leurs différences, leurs produits et leurs quotients appartiendront tous aussi au même complexe Ω; j'appellerai un tel complexe Ω *un corps fini du degré n*. Tous les nombres $\varphi(\theta)$ appartenant au corps Ω se partagent maintenant, conformément à la définition ci-dessus, en deux grandes classes, savoir, en nombres entiers dont nous désignerons le complexe par $\mathfrak{o}$, et en nombres non entiers ou nombres fractionnaires. *Le problème que nous nous proposons consiste à établir les lois générales de la divisibilité qui régissent un tel système $\mathfrak{o}$.*

Le système $\mathfrak{o}$ est évidemment identique avec le système de tous les nombres entiers rationnels, lorsqu'on a $n = 1$, ou avec celui des nombres entiers complexes, lorsqu'on a $n = 2$ et $\theta = \sqrt{-1}$. Certains phénomènes qui se présentent dans ces deux domaines $\mathfrak{o}$ spéciaux se reproduisent encore dans tout domaine $\mathfrak{o}$ de cette nature; il faut observer avant tout que la décomposition illimitée dont il a été question plus haut, et qui règne dans le domaine qui comprend tous les nombres algébriques entiers, ne se rencontre jamais dans un domaine $\mathfrak{o}$ de l'espèce indiquée, comme on peut aisément s'en assurer par la considération des normes. Si l'on entend, en effet, par *norme* d'un nombre quelconque $\mu = \varphi(\theta)$, appartenant au corps Ω, le produit

$$N(\mu) = \mu\mu_1\mu_2 \ldots \mu_{n-1},$$

dont les facteurs sont les nombres conjugués

$$\mu = \varphi(\theta), \quad \mu_1 = \varphi(\theta_1), \quad \mu_2 = \varphi(\theta_2), \quad \ldots, \quad \mu_{n-1} = \varphi(\theta_{n-1}),$$

$\theta, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ désignant toutes les racines de la même équation irréductible du $n^{\text{ième}}$ degré, $N(\mu)$ sera toujours, comme on sait, un nombre rationnel, et ne deviendra $= 0$ que si $\mu = 0$; en même temps, on a toujours

$$N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta),$$

α et β étant deux nombres quelconques du corps Ω. Si maintenant μ est un nombre entier et par suite un nombre compris dans $\mathfrak{o}$, les autres nombres conjugués $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ seront pareillement des nombres entiers, et par suite $N(\mu)$ sera un nombre entier rationnel. Cette norme joue un rôle extrêmement important da[illegible] théorie des nombres du domaine $\mathfrak{o}$; en effet, si deux nom[illegible] conques α, β de ce domaine sont dits *congrus* ou *incong*

à un troisième μ, pris pour *module*, selon que leur différence $\pm(\alpha - \beta)$ est ou n'est pas divisible par μ, on pourra, exactement comme dans la théorie des nombres entiers rationnels ou complexes, partager tous les nombres du système $\mathfrak{o}$ en *classes de nombres*, de sorte que chaque classe comprenne l'ensemble de tous les nombres qui sont congrus à un nombre déterminé, lequel sera le représentant de cette classe, et une étude plus approfondie nous apprend que le nombre de ces classes (à l'exception du seul cas de $\mu = 0$) est toujours fini, et de plus égal à la valeur absolue de $N(\mu)$. Une conséquence immédiate de ce résultat, c'est que $N(\mu)$ sera toujours $= \pm 1$ dans le cas, et seulement dans ce cas, où μ sera une unité. Si maintenant un nombre du système $\mathfrak{o}$ est dit *décomposable*, lorsqu'il est le produit de deux nombres de ce système, dont aucun ne soit une unité, il suit évidemment de ce qui précède que tout nombre décomposable peut toujours être représenté comme le produit d'un nombre fini de facteurs *indécomposables*.

Ce résultat correspond encore complétement à la loi qui a lieu dans la théorie des nombres entiers rationnels ou complexes, savoir que tout nombre composé peut être représenté par le produit d'un nombre fini de facteurs premiers; mais en même temps c'est ici le point où l'analogie, observée jusqu'ici, avec l'ancienne théorie menace de se rompre pour toujours. Dans ses recherches sur le domaine des nombres qui appartiennent à la théorie de la division du cercle, et qui correspondent par suite aux équations de la forme $\theta^m = 1$, Kummer a remarqué l'existence d'un phénomène par lequel les nombres de ce domaine se distinguent en général de ceux qu'on a considérés auparavant, d'une manière si complète et si essentielle, qu'il restait à peine un espoir quelconque de conserver les lois simples qui régissent l'ancienne théorie des nombres. En effet, tandis que, dans le domaine des nombres entiers, tant rationnels que complexes, tout nombre composé ne peut se mettre *que d'une seule manière* sous la forme d'un produit de nombres premiers, on reconnait que, dans les domaines numériques considérés par Kummer, un nombre décomposable peut souvent se représenter *de plusieurs manières, entièrement différentes entre elles,* sous la forme d'un produit de nombres indécomposables, ou, ce qui dans le fond revient au même, on reconnait que les nombres *indécomposables* ne possèdent pas tous le caractère d'un nombre *premier* proprement dit, lequel consiste en ce qu'un nombre premier ne peut

diviser un produit de deux ou de plusieurs facteurs, s'il ne divise au moins un de ces facteurs. Mais plus le succès des recherches ultérieures sur de tels domaines numériques devait sembler désespéré [1], plus on doit de reconnaissance aux efforts persévérants de Kummer, qui ont été enfin récompensés par une découverte vraiment grande et féconde. Ce géomètre est parvenu [2] à ramener toutes les irrégularités apparentes à des lois rigoureuses, et en considérant les nombres indécomposables, mais dépourvus du caractère de véritables nombres premiers, comme des produits de facteurs premiers *idéaux*, qui n'apparaissent et ne manifestent leur effet que combinés ensemble, et non pas isolés, il a obtenu ce résultat surprenant, que les lois de la divisibilité dans les domaines de nombres étudiés par lui coïncident maintenant complétement avec celles qui régissent le domaine des nombres entiers rationnels. Tout nombre qui n'est pas une unité se comporte, dans toutes les questions de divisibilité, tant dans un rôle actif que dans un rôle passif, ou comme un nombre premier, ou comme un nombre formé par la multiplication de facteurs premiers, existants ou idéaux, complétement déterminés. Deux nombres idéaux, soit premiers, soit composés, qui se changent en deux nombres existants par la combinaison avec un seul et même nombre idéal, sont dits *équivalents*, et tous les nombres idéaux équivalents à un même nombre idéal déterminé forment une *classe de nombres idéaux*; l'ensemble de tous les nombres existants, qui sont considérés comme un cas spécial des nombres idéaux, forme la *classe principale*; à chaque classe principale correspond un système d'une infinité de *formes* homogènes équivalentes, à n variables et du degré n, qui sont décomposables en n facteurs linéaires à coefficients algébriques; le nombre de ces classes est fini, et Kummer est parvenu à étendre à la détermination de ce nombre les principes par lesquels Dirichlet a déterminé le nombre des classes des formes quadratiques binaires.

---

(1) Dans le Mémoire : *De numeris complexis qui radicibus unitatis et numeris integri realibus constant* (*Vratislaviæ*, 1844, § 8), Kummer dit : « Maxime dolendum videtur, quod hæc numerorum realium virtus, ut in factores primos dissolvi possint qui pro eodem numero semper iidem sint, non eadem est numerorum complexorum, quæ si esset tota hæc doctrina, quæ magnis adhuc difficultatibus laborat, facile absolvi et ad finem perduci posset. »

(2) *Zur Theorie der complexen Zahlen* (*Journal de Crelle*, t. 35).

Le grand succès des recherches de Kummer, dans le domaine de la division du cercle, donnait lieu de présumer que les mêmes lois subsistaient dans *tous* les domaines numériques $\mathfrak{o}$ de l'espèce la plus générale, dont il a été question plus haut. Dans mes recherches, qui avaient pour but d'amener la question à une solution définitive, j'ai commencé par m'appuyer sur la théorie des congruences d'ordre supérieur, parce que j'avais déjà précédemment remarqué que par l'application de cette théorie les recherches de Kummer pouvaient être considérablement abrégées; mais, bien que ce moyen conduisît jusqu'à un point très-voisin du but de mes efforts, je n'ai pu toutefois réussir par cette voie à soumettre certaines exceptions apparentes aux lois constatées pour les autres cas. Je ne suis parvenu à la théorie générale et sans exceptions, que j'ai publiée pour la première fois au lieu indiqué plus haut, qu'après avoir entièrement abandonné l'ancienne marche plus formelle, et l'avoir remplacée par une autre partant de la conception fondamentale la plus simple, et fixant le regard immédiatement sur le but. Dans cette marche, je n'ai plus besoin d'aucune création nouvelle, comme celle du *nombre idéal* de Kummer, et il suffit complétement de la considération de ce *système de nombres réellement existants,* que j'appelle un *idéal*. La puissance de ce concept reposant sur son extrême simplicité, et mon dessein étant avant tout d'inspirer la confiance en cette notion, je vais essayer de développer la suite des idées qui m'ont conduit à ce concept.

Kummer n'a pas défini les nombres idéaux eux-mêmes, mais seulement la divisibilité par ces nombres. Si un nombre α possède une certaine propriété A, consistant toujours en ce que α satisfait à une ou plusieurs congruences, il dit que α est divisible par un nombre idéal déterminé, correspondant à la propriété A. Bien que cette introduction de nouveaux nombres soit tout à fait légitime, il est toutefois à craindre d'abord que, par le mode d'expression que l'on a choisi, dans lequel on parle de nombres idéaux déterminés et de leurs produits, et aussi par l'analogie présumée avec la théorie des nombres rationnels, on ne soit entraîné à des conclusions précipitées et par là à des démonstrations insuffisantes, et en effet cet écueil n'est pas toujours complétement évité. D'autre part, une définition exacte et qui soit commune à *tous* les nombres idéaux qu'il s'agit d'introduire dans un domaine numérique déterminé $\mathfrak{o}$, et en même temps une définition générale de leur multiplication paraissent

d'autant plus nécessaires, que ces nombres idéaux n'existent nullement dans le domaine numérique considéré $\mathfrak{o}$. Pour satisfaire à ces exigences, il sera nécessaire et suffisant d'établir une fois pour toutes le caractère commun de toutes les propriétés A, B, C, ..., qui toujours, et elles seules, servent à l'introduction de nombres idéaux déterminés, et ensuite d'indiquer généralement comment de deux de ces propriétés A, B, auxquelles correspondent deux nombres idéaux déterminés, on pourra déduire la propriété C qui doit correspondre au produit de ces deux nombres idéaux [1].

---

[1] La légitimité ou plutôt la nécessité de telles exigences, qui devraient toujours s'imposer dans l'introduction ou la création de nouveaux éléments arithmétiques, deviendra encore plus évidente par la comparaison avec l'introduction des nombres *réels irrationnels*, objet dont je me suis occupé dans un écrit spécial (*Stetigkeit und irrationale Zahlen*; Brunswick, 1872). En admettant que l'arithmétique des nombres *rationnels*, dont nous désignerons l'ensemble par R, soit définitivement fondée, il s'agit de savoir de quelle manière on devra introduire les nombres irrationnels, et définir les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division à exécuter sur ces nombres. Comme première exigence, je reconnais que l'Arithmétique doit être maintenue exempte de tout mélange d'éléments étrangers, et pour cette raison je rejette la définition d'après laquelle le nombre serait le rapport de deux grandeurs de même espèce; au contraire, la définition ou la création du nombre irrationnel doit être fondée uniquement sur des phénomènes que l'on puisse déjà constater clairement *dans le domaine* R. En second lieu, on devra exiger que tous les nombres réels irrationnels puissent être engendrés à la fois par une commune définition, et non successivement comme racines des équations, comme logarithmes, etc. La définition devra, en troisième lieu, être de nature à permettre aussi une définition parfaitement claire des calculs (addition, etc.) que l'on aura à faire sur les nouveaux nombres. On parvient à tout cela de la manière suivante, que je ne ferai ici qu'indiquer :

1° J'appelle *section* du domaine R un partage quelconque de tous les nombres rationnels en deux catégories, tel que chaque nombre de la première catégorie soit algébriquement moindre que chaque nombre de la seconde catégorie.

2° Tout nombre rationnel déterminé a *engendre* une section déterminée (ou deux sections, non essentiellement différentes), par cela qu'un nombre rationnel quelconque sera classé dans la première ou dans la seconde catégorie, suivant qu'il sera algébriquement plus petit ou plus grand que a (tandis que a lui-même pourra être inscrit à volonté dans l'une où dans l'autre des deux catégories).

3° Il y a une infinité de sections qui *ne peuvent pas* être engendrées par des nombres rationnels, de la manière indiquée : pour toute section de cette espèce, on crée et l'on introduit dans l'arithmétique un nombre *irrationnel* spécial, correspondant à cette section (ou l'engendrant).

4° Soient α, β deux nombres quelconques réels (rationnels ou irrationnels); il est facile, d'après les sections qu'ils engendrent, de définir si l'on a $\alpha > \beta$ ou $\alpha < \beta$; de plus, on peut aisément définir, au moyen de ces deux sections, les quatre sections auxquelles doivent correspondre la somme, la différence, le produit, le quotient des deux nombres α, β. Par là sont définies sans aucune obscurité les quatre opérations

Ce problème est essentiellement simplifié par les réflexions suivantes. Comme une telle propriété caractéristique A sert à définir, non un nombre idéal lui-même, mais seulement la divisibilité des nombres contenus dans $\mathfrak{o}$ par un nombre idéal, on est conduit naturellement à considérer l'ensemble $\mathfrak{a}$ de *tous* ces nombres α du domaine $\mathfrak{o}$ qui sont divisibles par un nombre idéal déterminé; j'appellerai dès maintenant, pour abréger, un tel système $\mathfrak{a}$ un *idéal*, de sorte que, à tout nombre idéal déterminé, correspond un *idéal* déterminé $\mathfrak{a}$. Maintenant comme, réciproquement, la propriété A, c'est-à-dire la divisibilité d'un nombre α par le nombre idéal, consiste uniquement en ce que α appartient à l'idéal correspondant $\mathfrak{a}$, on pourra, au lieu des propriétés A, B, C, ..., par lesquelles a été définie l'introduction des nombres idéaux, considérer les idéaux correspondants $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ..., pour établir leur caractère commun et exclusif. En ayant égard actuellement à ce que l'introduction des nombres idéaux n'a pas d'autre but que de ramener les lois de la divisibilité dans le domaine numérique $\mathfrak{o}$ à une complète conformité avec la théorie des nombres rationnels, il est évidemment nécessaire que les nombres réellement existants dans $\mathfrak{o}$, et qui toutefois se présentent en première ligne comme facteurs de nombres composés, ne soient considérés que comme un cas particulier des nombres idéaux; si donc μ est un nombre déterminé de $\mathfrak{o}$, le système $\mathfrak{a}$ de tous les nombres $\alpha = \mu\omega$ du domaine $\mathfrak{o}$ divisibles par μ aura également le caractère essentiel d'un idéal, et il sera appelé un *idéal principal;* ce système évidemment n'est pas altéré, quand on remplace μ par $\varepsilon\mu$, ε désignant une unité quelconque renfermée dans $\mathfrak{o}$. Maintenant, de la notion de nombre entier établie plus haut résultent immédiatement les deux théorèmes élémentaires suivants sur la divisibilité:

1° Si les deux nombres entiers $\alpha = \mu\omega$, $\alpha' = \mu\omega'$ sont divisibles par le nombre entier μ, leur somme $\alpha + \alpha' = \mu(\omega + \omega')$ et leur différence

---

fondamentales de l'Arithmétique pour deux nombres réels quelconques, et l'on peut *démontrer* réellement des propositions telles, par exemple, que l'égalité $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$, ce qui n'a pas encore été fait, que je sache, dans le sens rigoureux du mot.

5° Les nombres irrationnels ainsi définis forment, réunis aux nombres rationnels, un domaine $\mathfrak{R}$ sans lacunes et *continu;* toute section de ce domaine $\mathfrak{R}$ sera produite par un nombre déterminé du même domaine; il est impossible de classer encore de nouveaux nombres dans ce d-

$\alpha - \alpha' = \mu(\omega - \omega')$ seront aussi divisibles par μ, puisque la somme $\omega - \omega'$ et la différence $\omega - \omega'$ de deux nombres entiers ω, ω' sont elles-mêmes aussi des nombres entiers.

2° Si $\alpha = \mu\omega$ est divisible par μ, tout nombre $\alpha\omega' = \mu(\omega\omega')$, divisible par α, sera aussi divisible par μ, puisque tout produit $\omega\omega'$ de deux nombres entiers ω, ω' est aussi lui-même un nombre entier.

Si l'on applique ces théorèmes, vrais pour tous les nombres entiers, aux nombres ω de notre domaine numérique $\mathfrak{o}$, en désignant par μ un de ces nombres déterminés, et par $\mathfrak{a}$ l'idéal principal qui lui correspond, on obtiendra les deux propriétés fondamentales suivantes d'un tel système numérique $\mathfrak{a}$:

I. *Les sommes et les différences de deux nombres quelconques du système $\mathfrak{a}$ sont toujours des nombres du même système $\mathfrak{a}$.*

II. *Tout produit d'un nombre du système $\mathfrak{a}$ par un nombre du système $\mathfrak{o}$ est un nombre du système $\mathfrak{a}$.*

Maintenant, comme nous poursuivons le but de ramener généralement, par l'introduction des nombres idéaux et d'un mode de langage correspondant, les lois de la divisibilité dans le domaine numérique $\mathfrak{o}$ à une complète conformité avec celles qui règnent dans le domaine des nombres entiers rationnels, il s'ensuit que les définitions des nombres idéaux et de la divisibilité par ces nombres devront s'énoncer de telle manière que les deux théorèmes élémentaires ci-dessus, 1° et 2°, continuent à subsister lors même que μ ne serait pas un nombre existant, mais un nombre idéal, et par suite les deux propriétés I et II appartiendront non-seulement aux idéaux principaux, mais aussi à *tous* les idéaux. Nous avons donc trouvé par là un caractère *commun* à tous les idéaux : à tout nombre existant ou idéal correspond un idéal complétement déterminé $\mathfrak{a}$, jouissant toujours des deux propriétés I et II.

Mais un fait de la plus haute importance, et dont je n'ai pu démontrer rigoureusement la vérité qu'à la suite de nombreux et vains efforts et après avoir surmonté de grandes difficultés, c'est que, réciproquement, tout système $\mathfrak{a}$ qui jouit des propriétés I et II est aussi un idéal, c'est-à-dire que $\mathfrak{a}$ forme l'ensemble de tous les nombres α du domaine $\mathfrak{o}$ qui sont divisibles par un nombre existant déterminé, ou par un nombre idéal, indispensable pour compléter la théorie. Les deux propriétés I et II sont donc non-seulement les conditions nécessaires, mais encore les conditions suffisantes

pour qu'un système numérique $\mathfrak{a}$ soit un idéal ; toute autre condition à laquelle on voudrait assujettir les systèmes numériques $\mathfrak{a}$, si elle n'était pas une simple conséquence des propriétés I et II, rendrait impossible l'explication complète de tous les phénomènes de la divisibilité dans le domaine $\mathfrak{o}$.

Cette constatation m'a conduit naturellement à fonder toute la théorie des nombres du domaine $\mathfrak{o}$ sur cette définition simple, entièrement délivrée de toute obscurité et de l'admission des nombres idéaux ([1]) :

Tout système $\mathfrak{a}$ *de nombres entiers du corps* Ω, *qui possède les propriétés I et II, est dit* UN IDÉAL DE CE CORPS.

La divisibilité d'un nombre α par un nombre μ consiste en ce que α est un nombre $\mu\omega$ de l'idéal principal, qui correspond au nombre μ et peut être convenablement désigné par $\mathfrak{o}(\mu)$ ou $\mathfrak{o}\mu$; et de la propriété II ou du théorème 2°, il résulte qu'en même temps tous les nombres de l'idéal principal $\mathfrak{o}\alpha$ sont aussi des nombres de l'idéal principal $\mathfrak{o}\mu$. Réciproquement, il est évident que α est certainement divisible par μ, quand tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{o}\alpha$, et par suite aussi α lui-même, sont contenus dans l'idéal $\mathfrak{o}\mu$. De là on est conduit à établir la notion suivante de la *divisibilité*, non-seulement pour les idéaux principaux, mais encore pour tous les idéaux :

Un idéal $\mathfrak{a}$ *est dit* divisible *par un idéal* $\mathfrak{b}$, *ou un multiple de* $\mathfrak{b}$, *et* $\mathfrak{b}$ *un diviseur de* $\mathfrak{a}$, *lorsque tous les nombres de l'idéal* $\mathfrak{a}$ *sont en même temps contenus dans* $\mathfrak{b}$. *Un idéal* $\mathfrak{p}$, *différent de* $\mathfrak{o}$, *qui n'a aucun diviseur autre que* $\mathfrak{o}$ *et* $\mathfrak{p}$, *est dit un* idéal premier ([1]).

De cette divisibilité des idéaux, *qui comprend évidemment celle des nombres,* il faut d'abord bien séparer la notion suivante de la *multiplication* et des *produits* de deux idéaux :

Si α *parcourt tous les nombres d'un idéal* $\mathfrak{a}$, *et* β *tous les nombres d'un idéal* $\mathfrak{b}$, *tous les produits de la forme* $\alpha\beta$ *et toutes les sommes de ces produits formeront un idéal qui s'appellera le produit des idéaux* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, *et que l'on désignera par* $\mathfrak{ab}$ ([2]).

Or on voit immédiatement, il est vrai, que le produit $\mathfrak{ab}$ est divi-

---

([1]) Il est naturellement permis, quoique ce ne soit aucunement nécessaire, de faire correspondre à tout *idéal* tel que $\mathfrak{a}$ un *nombre idéal* qui l'engendre, si ce n'est pas un idéal principal.

([2]) En même temps le nombre idéal correspondant à l'idéal $\mathfrak{ab}$ s'appellerait *divisible* par le nombre idéal correspondant à l'idéal $\mathfrak{b}$; à un idéal premier correspondrait un nombre idéal *premier*.

sible aussi bien par $\mathfrak{a}$ que par $\mathfrak{b}$; mais l'établissement complet de la liaison entre les deux notions de la divisibilité et de la multiplication des idéaux réussit seulement après que l'on a vaincu des difficultés caractéristiques, profondément attachées à la nature du sujet; cette liaison s'exprime essentiellement par les deux théorèmes suivants :

Si l'idéal $\mathfrak{c}$ est divisible par l'idéal $\mathfrak{a}$, il existera toujours un idéal $\mathfrak{b}$, et un seul, tel que le produit $\mathfrak{ab}$ soit identique avec $\mathfrak{c}$.

Tout idéal différent de $\mathfrak{o}$ ou est un idéal premier, ou peut être représenté, et cela d'une seule manière, sous forme d'un produit d'idéaux tous premiers.

Dans le présent Mémoire, je me borne à démontrer ces résultats avec une entière rigueur et par voie synthétique. En cela consiste le *fondement* propre de la théorie complète des idéaux et des formes décomposables, laquelle offre aux mathématiciens un champ inépuisable de recherches. De tous les développements ultérieurs, pour lesquels je dois renvoyer à l'exposition faite dans les *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet et à quelques Mémoires qui paraîtront plus tard, je n'ai inséré dans le Mémoire actuel que le partage des idéaux en *classes*, et la démonstration que le nombre de ces *classes d'idéaux* (ou des classes de formes correspondantes) est fini. La première Section contient seulement les propositions indispensables pour le but présent, extraites d'une théorie auxiliaire, importante aussi pour d'autres recherches, et dont je publierai ailleurs l'exposition complète. La seconde Section, qui a pour but d'éclaircir sur des exemples numériques complétement déterminés les notions générales qui devront être introduites plus tard, pourrait être entièrement supprimée; mais je l'ai conservée parce qu'elle peut être utile pour faciliter l'intelligence des Sections suivantes, où l'on trouvera la théorie des nombres entiers d'un corps fini quelconque développée jusqu'au point indiqué ci-dessus. Pour cela, il suffit d'emprunter seulement les premiers éléments à la théorie générale des corps, théorie dont le développement ultérieur conduirait aisément aux principes algébriques inventés par Galois, lesquels servent à leur tour de base aux recherches plus approfondies dans la théorie des idéaux.

(*A suivre.*)

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XI. — JUILLET-DÉCEMBRE 1876.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Pages.

Duhamel (J.-M.-C.). — Éléments de Calcul infinitésimal. 3e édition.......... 241

Eschericb (G. v.). — Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung.......... 111

Glaisher (J.-W.-L.). — Report of the Committee on mathematical Tables..... 7

Günther (S.). — Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.......... 108

Hattendorff (K.). — Schwere, Electricität und Magnetismus, nach den Vorlesungen von B. Riemann.......... 97

Kepleri (J.) astronomi Opera omnia. Edidit Dr Chr. Frisch.......... 49

Romer (P.). — *Osnovnyia*.... Principes fondamentaux de la théorie des quaternions.......... 113

Rubini (R.). — Elementi di Calcolo infinitesimale. 2a edizione.......... 145

Studnička (F.-J.). — Základové nauky o číslek. *Kniha I*.......... 147

Winckler (A.). — I. Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — II. Integration zweier linearen Differentialgleichungen.......... 193

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

Annales des Ponts et Chaussées. 5e série, t. I-V.......... 259

Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. T. LVII-LVIII.......... 214

Casopis pro pěstování mathematiky a fysiky. T. IV-V.......... 79

Page.

Journal de Mathématiques pures et appliquées, 3e série, publiée par H. Resal. T. I, juin-décembre 1875. 135
Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von C.-W. Borchardt. T. LXXX-LXXXI 27
Mémorial de l'Officier du Génie. T. XVI-XXVIII (2e série, t. I-VIII).... 254
Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London. T. XXXVI. 149 et 194
Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen. Années 1873-1875.... 271
Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Ch. Brisse. 2e série, t. XV (1er semestre); 1876.... 120
Outchonyia Zapiski.... Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Kazan. Année 1872.... 114
Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. T. V-VII.. 255
Revue d'Artillerie. T. I-VI.... 74
Roczniki C. K. Towarzystwa naukowego Krakowskiego. 3e série; t. VII, X, XII, XVI, XIX.... 267

MÉLANGES.

Beltrami (E.). — Formules fondamentales de Cinématique dans les espaces de courbure constante.... 233
Dedekind (R.). — Sur la théorie des nombres entiers algébriques.... 278
Imschenetsky (V.). — Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complétement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux dérivées partielles.... 162
Mayer (A.). — Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales, et sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux différentielles partielles.... 87, 125
Tannery (J.). — Sur le plan osculateur aux cubiques gauches.... 183
— Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même.... 221

Publications nouvelles.... 192

TABLE GÉNÉRALE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

CITÉS DANS CE VOLUME.

Pages.

Abney (W. de W.). — Sur la photographie de la partie la moins réfrangible du spectre 205
Affolter (Fr.-G.). — Sur la géométrie du cercle et de la sphère.... 214
Airy (G.-B.). — Carte de l'orbite apparente de la planète Mars dans le ciel, du 25 juillet au 28 octobre 1877, et Catalogue des étoiles qui l'avoisinent 198
— Observations spectroscopiques faites à l'Observatoire Royal de Greenwich.................... 198
— Observation de l'éclipse de Soleil du 28-29 septembre 1875, faite à l'Observatoire Royal de Greenwich. 199
— Sur l'état actuel des calculs de sa nouvelle théorie de la Lune... 201
— Occultations d'étoiles par la Lune et phénomènes des satellites de Jupiter observés à Greenwich.... 201
— Mesures micrométriques des satellites de Saturne, faites à l'Observatoire Royal de Greenwich pendant l'année 1875.............. 205
Allégret. — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre..... 156
— Mémoire sur le problème des trois corps.................... 157
André. — Détermination de quelques éléments des solides de révolution. 79
Arcimis (A.-F.). — Observations de la lumière zodiacale faites à Cadix. 199
Astier. — Du tir en brèche à grande distance contre des maçonneries couvertes............ 77

Pages.

August (F.). — Démonstration du théorème de Peaucellier........ 219
— Théorème concernant certaines courbes du sixième degré dans l'espace...................... 219
Bailly-Maître. — Mémoire sur la mise en place et le fonctionnement des barrages de la Moselle, à Thionville, pendant le blocus de 1870, et sur les améliorations dont ces systèmes de barrages sont susceptibles..................... 254
Bardonnaut. — Note sur la mise du feu aux mines au moyen de l'électricité......................... 248
Barisien. — Mémoire sur l'application de l'électricité dynamique à l'inflammation des fourneaux de mine........................... 247
— Rectifications proposées à deux Mémoires de MM. les généraux Poncelet et Ardant sur la stabilité des revêtements................ 248
— *Voir* Devèze et Barisien........ 248
— Note sur la manœuvre du pont-levis à contre-poids constant avec spirales du colonel Devèze....... 252
Baudys (V.). — Sur le centre optique et les foyers principaux des lentilles.. 84
— Théorie de l'arc-en-ciel secondaire........................ 86
Baxendell. — Sur l'étoile variable S du Dauphin................ ... 255
— Sur la variabilité de l'étoile T de l'Aigle.... 256
— Sur la variabilité de l'étoile S de la Couronne................ 256

Pages.

— Sur une nouvelle étoile variable R de la Coupe.................... 257
— Observations d'une nouvelle étoile variable T de la Couronne...... 257
— Éléments de l'étoile variable R de Persée..................... 258
Bazin. — Résistance des panneaux à la balle de calibre.............. 247
— Étude comparative des formules nouvellement proposées pour calculer le débit des canaux découverts.... 260
— Discussion des expériences les plus récentes sur la distribution des vitesses dans un courant..... 265
Bečka (B.). — Détermination de la valeur du produit imaginaire

$$\prod_{n=1}^{n=\infty} \frac{n(n+1)+(1+i)}{n(n+1)+(1-i)} \cdots\cdots 83$$

— Sur les points multiples........ 85
Beltrami (E.). — Formules fondamentales de Cinématique dans les espaces de courbure constante... 233
Bender (C.). — Sur la théorie des lois d'attraction................ 218
Benoît. — Mémoire sur les appareils de chauffage et de ventilation construits à l'hôpital militaire de Vincennes.................... 247
Berg (F.-W.). — Sur la précession générale..................... 211
— Sur la détermination de la distance d'une comète à la Terre, à l'aide de trois observations...... 213
Bichat. — Notice sur la boussole topographique.................. 246
Birmingham (J.). — Sur les cartes lunaires de Lohrmann et Schmidt, et sur une nouvelle étoile rouge. 206
Birt. — Sur une tache variable de la surface de la Lune........... 259
Bjerknes (C.-A.). — Notices historiques sur le problème de Dirichlet concernant la sphère et l'ellipsoïde........................ 274
— Généralisation du problème de l'ellipsoïde en repos dans un fluide indéfini en mouvement......... 274
— Généralisation du problème des mouvements produits par le mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide non élastique en repos.... 275

Pages.

Blackhouse (T.-W.). — Sur la lumière zodiacale................ 199
Blažek (G.). — Remarque sur le calcul de l'intérêt composé...... 82
Blondeau. — Expériences sur un ventilateur à force centrifuge.... 247
Boltzmann (L.). — Remarque relative au Mémoire de M. O.-E. Meyer sur le frottement intérieur. 41
Bourguet. — Extrait d'une Lettre au Rédacteur des *Nouvelles Annales*. 125
Boussinesq. — Sur la stabilité des terres sans cohésion............ 264
Bouvier. — Calculs de résistance des grands barrages en maçonnerie.. 265
Breton (de Champ). — Réponse à M. J. Bertrand, relative à l'article: « Sur de prétendues inadvertances de Lagrange »................. 156
Brett (J.). — Sur le mouvement propre des taches brillantes que l'on observe à la surface de Jupiter............................ 213
Brill (A.) et Noether (M.). — Sur les fonctions algébriques et leur emploi en Géométrie............ 272
Broda (K.). — Contribution à la théorie des fractions décimales périodiques mixtes.............. 219
Brothers. — Description d'un appareil de photographie céleste..... 256
— De la couleur de la Lune durant les éclipses.................... 258
Burnham (S.-W.).— Sur les systèmes stellaires doubles Σ 1156 et Σ 1163. 201
— Catalogue d'étoiles doubles rouges. 211
Burton (C.-E.). — Sur la nébuleuse australe 30 (Bode) de la Dorade, et sur celle qui entoure η d'Argus. 201
Capello. — Sur ses anciens dessins du Soleil...................... 197
Carlier. — Note sur l'emploi, aux fortifications de Paris, de la machine à écoperche pour le transport vertical des terres.......... 246
Carrington. — Sur les taches solaires........................ 203
Caspary (F.). — La surface des centres de courbure dans le paraboloïde elliptique.............. 43
Catalan (E.). — Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet... 155
Cayley (A.). — Correction de deux erreurs numériques qui se trouvent dans le travail de Sohncke

Pages.

sur les équations modulaires (t. 16 du *Journal de Crelle*)........... 45

CITRE. — Appareil hélicoïdal des voûtes biaises à section droite circulaire...................... 265

CÉZANNE (DE). — Relation d'un voyage aéronautique................... 261

CHORON. — Calcul des moments fléchissants et des flèches dans les poutres droites métalliques à plusieurs travées.................. 265

CHRISTIE (H.-M.). — Sur un nouvel oculaire solaire................ 201

— Sur le déplacement des lignes des spectres stellaires........... 210

CLIFTON. — Essai de description de tous les phénomènes tendant à ramener l'émission de la lumière à des principes mécaniques....... 255

COATPONT (DE). — Mémoire sur les perspectives rayonnantes et leur application au défilement........ 248

COCKLE. — Sur les corésolvants.... 255

— Mémoire sur l'évaluation des intégrales. 258

COLLIGNON.—Note sur l'intégromètre de M. Marcel Deprez........... 261

COMBESCURE (É.). — Sur quelques systèmes particuliers d'équations différentielles................. 48

CORBIN. — Mémoire sur les cuisines à vapeur......................... 253

COULAINE (DE). — Note sur une nouvelle forge pour le ferrage des chevaux.... 246

CREUZET DE LATOUCHE. — Étude sur la construction des bouches à feu de l'artillerie moderne.......... 76

ČUBR (E.). — Sur les mesures de la Terre......................... 80

CURIE. — Note sur le réglage des ponts-levis.................... 252

— Nouvelles expériences relatives à la poussée des terres............ 254

CURIE, DE LAPPARENT, HENNEBERT, MASSU, LOISY, DELACROIX, HINSTIN, LE BEURRIÉE, MERLIN (F.), VILLEBONNET. — Notes diverses sur l'art des constructions................. 255

CURTZE (M.).— Note sur un Mémoire de M. Rath, intitulé : « Les triangles rationnels »........ 215

DAMBRUN. — Effets des mines militaires 249

— Recueil d'expériences sur les efforts souterrains des fourneaux de mine........................... 250

DAVIS (C.-H.). — Dessins de Mars et de Jupiter faits avec l'équatorial de $0^m,66$ de l'Observatoire Naval des États-Unis................ 197

DECOMBLE. — Calcul des dimensions des dalles employées en couverture d'aqueduc................. 261

DEDEKIND (R.). — Sur la théorie des nombres entiers algébriques..... 278

DELACROIX. — *Voir* CURIE, DE LAPPARENT, etc...................... 255

DELAMBRE. — Mémoire sur un manuel-memento du mineur, avec abaque, etc.................... 250

— *Voir* ROUSSET et DELAMBRE....... 252

DELORT et GOULIER. — Note sur le téléiconographe de MM. Révoil et Viollet-le-Duc................ 255

DENIÉPORT. — Compte rendu sur la construction en 1847, 1848 et 1859 du pont de la Sorille à Sedan... 246

DENIÉPORT et JOURDAIN. — Note sur un mode de réparation des escarpes employé à Sedan........ 246

DENNING (W.-F.). — Points radiants de quelques étoiles filantes, et observation faite à Bristol de novembre 1872 à mars 1876....... 206

— Visibilité de Mercure et de Vénus pendant le jour................ 212

DEVÈZE et BARISIEN. — Mémoire sur le pont-levis à contre-poids constant avec spirales de la porte Randon, à Grenoble............ 248

DEVIN. — Théorème sur le triangle.. 123

DICKSTEIN (S.). — Démonstration d'un théorème de la théorie du calcul des opérations........... 217

DOSTOR (G.). — Le trièdre et le tétraèdre, avec application des déterminants...................... 215

— Équation générale des deux tangentes menées d'un même point à une conique, et équation du cône circonscrit à une surface du second degré......................... 215

— Nouvelle expression de la surface du triangle, avec application au calcul en déterminant de cette surface en valeur de trois côtés du triangle....................... 215

— Sommation directe et élémentaire des [illegible] cubes, des

Pages.

quatrièmes puissances des n premiers nombres entiers 216
— Distances du point à la droite et du point au plan 216
— Volumes des solides engendrés par la révolution des polygones réguliers autour d'un de leurs côtés 216
— Relations entre les sinus des quatre trièdres formés par quatre droites issues d'un même point, avec application au tétraèdre 217
— Application des discriminants aux courbes et surfaces du second degré 217
— Application des déterminants aux surfaces de révolution et, en particulier, à celles du second degré. 217
— Expression en déterminant de la surface d'un triangle de l'espace, en valeur des coordonnées de ses trois sommets 219
— Application des déterminants aux surfaces cylindriques, et en particulier aux cylindres du second degré 219
— Propriétés des nombres 220
— Détermination du chiffre qui termine les puissances successives des nombres entiers 220
Dreyer (J.). — Sur la comète de Coggia (III, 1874) 211
Du Bois-Reymond (P.). — Sur les séries de Fourier 274
Duchêne. — Sur une question de balistique expérimentale 78
— Sur la dépendance mutuelle des divers éléments d'un système d'artillerie 79
Duhamel (J.-M.-C.). — Éléments de Calcul infinitésimal 241
Dunkin (E.). — Comparaison des observations récentes et anciennes de l'étoile B.A.C. 793; remarques sur la variabilité supposée de son mouvement propre 204
— Découverte de quatre petites planètes 211
Durand-Claye. — Les pompes centrifuges simples et accouplées 262
Durrande (H.). — Sur l'application des déterminants à la théorie des moments des forces. Traduit par K. Zahradnik 86
Dyer. — Simples notes sur les lois des forces physiques 259
Ellery (L.-J.). — Résultats de quelques expériences faites avec le pendule parabolique d'Huygens 201
Enneper (A.). — Remarques sur l'enveloppe d'une surface sphérique. 273
— Remarques sur les surfaces orthogonales. 2e *Note* 274
— Remarques sur la théorie générale des surfaces 275
— Remarques sur les recherches de Géométrie analytique 275
— Sur quelques théorèmes concernant les surfaces du second degré. 275
— Sur un problème de Géométrie. 276
— Remarques sur la flexion de certaines surfaces 277
— Tables des fonctions symétriques de poids XI, par M. le professeur Faà de Bruno 277
Escary. — Remarque sur la Note de M. Floquet relative à l'intégration de l'équation d'Euler 122
Escherich (G. v.). — Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung 111
— Démonstration de la formule générale de la mesure de la courbure des surfaces 216
Faà de Bruno. — Sur les fonctions génératrices de Borchardt 45
Fabré. — Note sur la ferme funiculaire 46
Faure. — Théorie des indices 25
Flamant. — Note sur la poussée des terres 6
— Traduction d'un Mémoire de Macquorn Rankine sur la stabilité de la terre sans cohésion ....
Frisch (Chr.). — *Voir* Kepler ......
Fritsch. — Étude théorique et pratique des dynamites et de quelques poudres brisantes dérivées de l'azote .... 249, 252 et
Frobenius (G.). — Sur des équations différentielles linéaires qui admettent des intégrales algébriques ...
— Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires.
Fromme (C.). — La fonction magnétisante d'une sphère de fer doux.
— Recherches sur le magnétisme des barreaux d'acier ....
— Note sur le maximum du magnetisme temporaire dans le fer doux.

Pages.

Fuchs (L.). — Sur les équations différentielles linéaires du second ordre qui possèdent des intégrales algébriques et sur une nouvelle application de la théorie des invariants.................. 41 et 277

Gagcot. — Note sur le moyen employé pour exécuter économiquement les terrassements des glacis du fort Risban, à Calais......... 246

Gambey. — Note sur le rayon de courbure des sections coniques... 123

Gariel. — Grue flottante de 100 tonnes, construite à New-York par M. Isaac Newton................ 263

— Les dynamites, par M. Fritsch, capitaine du Génie............. 263

Genet. — Note sur les ponts-levis dits *en zigzag*................. 246

— Notice sur les garde-corps des ponts-levis..................... 246

Gill (D.). — *Voir* **Lindsay** (lord) et **Gill** (D.). 196

Glaisher (J.-W.-L.). — Report of the Committee on mathematical Tables.......................... 7

Gledhill (J.). — Phénomènes des satellites de Jupiter, observés à l'Observatoire de M. Crossley.... 199

Goulier. — Mémoire sur la stadia et sur les instruments servant, conjointement avec elle, au mesurage des distances..................... 246

— Mémoire sur le télémètre à prismes....................... 248

— Note sur les niveaux à collimateur. 254

— Description raisonnée des mires de nivellement de l'École d'application de l'Artillerie et du Génie. 254

— Note sur une boussole nivelante en métal organisée en vue du service du Génie............ 255

— Note sur la lunette anallatique de M. Goulier................. 255

— Note sur divers instruments de nivellement propres à être utilisés en campagne, et dont la plupart sont susceptibles d'être improvisés au moment du besoin.......... 255

— *Voir* **Delort** et **Goulier**.. 255

— Renseignements sur le poids des charges de dynamite Nobel n° 1 à employer pour détruire les maçonneries.................... 255

Pages.

Grasset. — Mémoire sur la mesure des surfaces et des volumes et sur la détermination de leurs centres de gravité, avec une application à la poussée des voûtes cylindriques. 247

Gravelaar (N.-L.-W.-A.). — Nouvelle démonstration de la réalité des racines d'une équation importante......................... 219

Greiner (M.). — Le facteur de transformation....... 216

— La ligne orthoptique d'une section conique.................. 216

Grillon. — Étude sur le casernement de la cavalerie en France........ 250

— Étude sur le casernement de l'infanterie en France.............. 253

Gueysse (P.). — De la propagation des marées dans les rivières..... 161

Guillemot.—Figure donnant les charges des fourneaux quelconques... 250

Gundelfinger (S.). — Sur le système simultané de trois formes quadratiques ternaires................. 30

Günther (S.). — Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der matematischen Wissenschaften..... 108

— Problème de Stéréométrie 215

— Le développement des côtes; contribution mathématique à la Géographie comparée.............. 216

— Démonstration d'un théorème fondamental sur les carrés magiques.... 216

Habich (E.). — Un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques.............. .. 270

Hain (Em.). — Sur le pentagone des diagonales d'un pentagone inscrit au cercle. Sur les cercles inscrits au triangle.................... 215

— Sur les harmoniques dans le triangle.......................... 216

— Théorèmes divers sur le triangle. 216

— Sur les transversales parallèles au triangle. Sur le point de concours de transversales parallèles égales......................... 217

— Sur le point de Grebe......... 217

— Sur les bissectrices des angles d'un triangle.................. 218

— Sur le point de Spieker........ 218

— Sur le centre de gravité du triangle......................... 218

— Sur les points de symétrie du

Pages.
triangle.... 218
— Sur le cercle circonscrit au triangle.............. 220
— Sur les systèmes symétriques de points du triangle.............. 220
— Sur la formation de nouveaux points de symétrie.... 220
HAMBURGER. — Sur la théorie de l'intégration d'un système de n équations linéaires du premier ordre aux différentielles partielles contenant deux variables indépendantes et n dépendantes.......... .. 46
HATON DE LA GOUPILLIÈRE. — Note sur les courbes que représente l'équation $\rho^n = A \sin n\omega$. 122
HATTENDORFF (K.). — Schwere, Electricität und Magnetismus nach den Vorlesungen von Bernhard RIEMANN...................... 97
— Remarques sur le théorème de Sturm........................ 275
HEJZLAR (Fr.). — Sur les courbes caustiques..................... 80
HELLWIG (C.). — Contributions à la théorie du tétraèdre et des angles solides.. 218
HENNEBERT. — *Voir* CURIE, DE LAPPARENT, etc...................... 255
HENRY (F.). — Description d'un ellipsomètre..................... 262
HERMITE (Ch.). — Sur les nombres de Bernoulli.................. 41
— Sur le développement des fonctions elliptiques suivant les puissances croissantes de la variable.. 45
HERTZ (C.). — Démonstration d'une proposition de la théorie de l'addition géométrique des droites dans l'espace. 219
HIMSTEDT (F.). — Sur les oscillations d'un aimant sous l'influence retardatrice d'une sphère de cuivre. 277
HIND (J.-R.). — Sur le passage de la grande comète de 1819 au devant du disque solaire.............. 210
HIND. — Éphémérides de 71 étoiles variables pour l'année 1867...... 258
HINSTIN. — *Voir* CURIE, DE LAPPARENT, etc..... 255
HIRSCH. — Théorie des machines aérothermiques........... 263 et 266
HOCHHEIM (Ad.). — La poloconique mixte de deux droites par rapport à la courbe différentielle de la parabole......................... 216
— Les foyers de la courbe différentielle de la parabole............ 219
— Les polaires réciproques de la courbe différentielle de la parabole par rapport au cercle........... 220
HOLDEN (E.-S.). — Dessins de la nébuleuse annulaire de la Lyre.... 200
HOPPE (R.). — Sur le problème du système de surfaces triplement orthogonal............... 215 et 217
Voir OELSCHLÄGER, STAMMER (W.) et HOPPE (R.). 215
— Exemple d'une surface à un seul côté........................... 216
— Sur les points de symétrie du triangle 217
— Surfaces minima des trois premières classes de polyèdres..... 220
— Remarques sur le calcul des logarithmes à quatre décimales.... 221
HOÜEL (J.). — Remarques sur l'enseignement de la Trigonométrie. 84
HOWLETT (F.). — Dessins des taches solaires....................... 206
HOZA (F.). — Les intérêts composés et le calcul des annuités, pour les élèves de l'enseignement moyen.. 86
— Remarque sur une proposition de M. *Dostor* relative au trièdre.... 219
HROMÁDKO (F.). — Démonstration analytique de la construction des normales à l'ellipse............. 81
— Remarque sur la somme des nombres carrés..................... 82
— Comment on peut doubler la puissance d'un courant galvanique.......................... 82
— Extraits du Traité indien d'Arithmétique intitulé *Lilâvâti*....... 85
— Sur la probabilité de l'existence des rayons ultra-rouges dans le spectre solaire. 86
IMSCHENETSKY (V.). — Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complétement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux dérivées partielles.......... 162
JAROLÍMEK (C.). — Sur la construction, par la Géométrie descriptive, de l'intersection des droites avec les courbes du second degré données par leurs axes............. 82
JAVARY. — Opérations photographi-

Pages.

ques........................... 248
— Mémoire sur l'application de la Photographie aux arts militaires. 252
JOHNSON. — Sur la chambre pantoscopique...................... 257
JOUART. — *Voir* MANCERON, JOUFFRET et JOUART......... 76
— Balistique intérieure expérimentale, d'après G. Ellena... 77 et 78
— Le marteau-pilon de 50 tonnes de Perm...................... 79
JOUFFRET. — *Voir* MANCERON, JOUFFRET et JOUART..................... 76
— Sur l'établissement et l'usage des Tables de tir............ 76 et 77
— Théorie élémentaire du mouvement du gyroscope, de la toupie et du projectile oblong... 77 et 78
JOUFFRET et MANCERON. — Description des artilleries prussienne, autrichienne, anglaise et russe.. 75
JOURDAIN. — *Voir* DENIÉPORT et JOURDAIN.......................... 246
JÜRGENS (E.). — La forme des intégrales des équations différentielles linéaires...................... 32
KARLIŃSKI. — Observations des petites planètes (84) et (85) (Clio et Io) à l'Observatoire de Cracovie.. 269
KEPLER (J.). — Johannis Kepleri opera omnia; edidit Dr Chr. Frisch.... 49
KIEPERT (L.). — Sur les surfaces minima. 1er *Mémoire*............ 48
KIRKMAN. — Note sur un essai de résolution des équations algébriques, par feu Hargreave........ 259
KLEIN. — Mémoire sur l'électricité appliquée à l'inflammation des fourneaux de mine............ 248
KLINKERFUES (W.). — Sur une grande pluie d'étoiles filantes dans l'année 524 après J.-C., et sa relation probable avec la comète de Biela et celle de l'année 1162......... 273
— Sur les systèmes d'étoiles fixes, leurs parallaxes et leurs mouvements. Communication préliminaire......................... 273
— Addition à la méthode de détermination de la parallaxe au moyen des radiants.................. 274
KNOBEL (E.-B.). — Bibliographie de diverses publications astronomiques................................ 214
KNORRE. — Découverte de la planète (158)............. 203
KNOTT (G.). — Sur la variabilité de l'étoile R du Petit-Renard....... 256
— Résultats de la comparaison des grandeurs d'étoiles indiquées dans les catalogues de Bedford et de Bonn....................... 257
— Sur la grandeur combinée de deux étoiles en voisinage immédiat.... 257
— Éléments de l'étoile variable R du Petit-Renard............... 258
KOHLRAUSCH (F.). — Sur l'équivalent électro-chimique de l'eau....... 273
— Sur la thermo-électricité et sur la conductibilité thermique et électrique....................... 275
— Sur la réaction élastique....... 276
KÖNIGSBERGER (L.). — Sur les relations les plus générales qui existent entre les intégrales hyperelliptiques..................... 44
— Relations entre les modules de périodicité de deux intégrales hyperelliptiques................. 277
KOSCH (F.). — Trisection d'un angle quelconque au moyen de l'hyperbole équilatère................ 218
KOSTKA. — Sur la détermination des fonctions symétriques des racines d'une équation algébrique par ses coefficients..................... 47
KOWALEVSKY (Sophie v.). — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles..................... 27
KUCHYNKA (M.). — Sur les principes scientifiques de l'art du dessin, depuis son origine jusqu'au milieu du XVe siècle............... 82
KUCZYŃSKI (E.). — Nouveau thermographe métallique............. 269
KÜLP. — Procédé expérimental pour déterminer la résistance de conductibilité dans les éléments et dans les boussoles des tangentes. 221
— Sur le rapport d'un élément à petite surface à un élément à grande surface........................ 221
LA GRÉVERIE (DE). — Notice sur un appareil à plans inclinés employé au transport vertical des terres.. 247
— Notice sur les revêtements avec voûtes en décharge............ 247
LAGUERRE. — Sur les lignes géodési-

Pages.
ques des surfaces du second ordre. 121
— Sur la méthode de Monge pour l'intégration des équations linéaires aux différentielles partielles du second ordre.................. 121
— Sur les singularités des courbes de quatrième classe.... 156
La Noë (de). — Extrait d'une Note sur la reproduction des dessins au moyen du papier préparé au ferroprussiate de potasse.......... 252
Lapparent (de). — *Voir* Curie, de Lapparent, etc................ 255
Lassell (W.). — Sur la visibilité de la portion non éclairée du disque de Vénus..................... 214
Laurent (H.). — Mémoire sur les fonctions de Legendre.......... 160
Laussedat. — Mémoire sur l'emploi de la chambre claire dans les reconnaissances topographiques.... 247
— Mémoire sur l'application de la photographie au lever des plans. 247
Lavoinne. — Note sur la résistance des parois planes des chaudières à vapeur...................... 262
— De la répartition des charges sur les tabliers des ponts.......... 263
Le Beurrier. — *Voir* Curie, de Lapparent, etc.................... 255
Lechalas. — Note sur les rivières à fond de sable.................. 260
Lefort. — Théorie de l'intérêt composé et des annuités, d'après un ouvrage de Fédor Thoman.. 262
Lie (S.). — Sur les groupes de transformations.................... 276
Ligowski. — Limites de la base des logarithmes naturels........... 216
— Contribution aux quadratures mécaniques................... 217
— Démonstration de la formule donnée par Lhuilier pour l'excès sphérique........................ 218
Lindman (C.-F.). — Problème de Géométrie.................... 221
Lindsay (lord) et Gill (D.). — Sur l'état des réductions de leurs observations lors du passage de Vénus.......................... 196
Lipschitz (R.). — Généralisation de la théorie du rayon osculateur d'une surface................. 47
Listing (J.-B.). — De l'état actuel de nos connaissances sur la forme et la grandeur de la Terre...... 272
Loisy. — *Voir* Curie, de Lapparent, etc........................ 255
Löwe (O.). — Sur les solides réguliers et les solides de Poinsot, et sur le calcul de leurs volumes au moyen des déterminants........ 217
Lotre. — Note sur l'emploi des marmites thermostatiques chauffées par l'introduction de la vapeur d'eau.......................... 253
Lucas (É.). — Problèmes sur l'ellipse.......................... 120
— De la trisection de l'angle à l'aide du compas sphérique........... 121
— Théorèmes nouveaux sur la parabole et l'hyperbole........... 121
— Question nouvelle d'Arithmétique supérieure..................... 122
— Sur l'origine de l'idée de la Cinématique..................... 122
— Sur la relation de Möbius, qui exprime que quatre points d'un plan sont situés sur un cercle.... 124
— Sur un problème de Halley relatif à la théorie des sections coniques.......................... 124
Lucas (F.). — Démonstration nouvelle du théorème de Coriolis... 121
Lukas (F.). — Démonstration de ce théorème : $x^n + y^n = z^n$, pour $n > 2$, n'est pas résoluble en nombres entiers, avec une courte solution pour $n = 2$............. 218
Lüroth (J.). — Sur le calcul des *Würfe*........................ 274
Lyon. — Extrait d'une Note relative au choix des arbres destinés à être débités en blindages et en palissades......................... 249
Malézieux. — Le service météorologique aux États-Unis. 262
— Les chemins de fer anglais...... 263
— Fondations à l'air comprimé.... 263
Maly (Fr.). — Théorèmes sur la droite dans l'espace............ 217
Manceron. — *Voir* Jouffret et Manceron.... 75
Manceron, Jouffret et Jouart. — Description des artilleries russe, suisse et italienne.................. 76
Mangin. — Mémoire sur un nouveau pont-levis à contre-poids variables et à poulies mobiles........ 248
— Mémoire sur trois projets d'affûts

Pages

à éclisse ... 250
— Note sur un nouveau système de télégraphie optique ... 250
— Mémoire sur le système de télégraphie optique de la défense de Paris ... 253
Mannheim. — Note sur le tir lorsque le but est élevé au-dessus de l'horizon ... 79
Mansion (P.). — Démonstration de la propriété fondamentale des équations différentielles linéaires. 218
Marcille. — Notice sur le rétablissement du pont de Clerval, sur le Doubs, en janvier 1871 ... 254
— Note sur la destruction du tunnel de Martainville en septembre 1870 ... 254
Marth (A.). — Éphéméride destinée à donner les positions des satellites d'Uranus ... 200
Martin (G.). — Note sur un déblai de roc exécuté au fort du Roule, à Cherbourg, en 1851 et 1852 ... 247
Massu. — *Voir* Curie, de Lapparent, etc ... 255
Mathieu (É.). — Mémoire sur les inégalités séculaires des grands axes des orbites des planètes ... 31
Mayer (Ad.). — Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales, et sur l'intégration simultanée des équations linéaires aux différentielles partielles ... 87 et 125
— Sur l'intégration des équations aux différentielles partielles du premier ordre ... 273
— Sur les transformations de contact de Lie ... 276
Meissel (E.). — Remarques sur la série hypergéométrique ... 217
Merlin (F.). — *Voir* Curie, de Lapparent, etc ... 255
Mertens (Fr.). — Calcul du potentiel pour les polyèdres homogènes ... 270
Meyer (O.-E.). — Addition au Mémoire sur la théorie du frottement intérieur (*Journal de Crelle*, t. 78). 35
Michal. — Deuxième Note sur le jaugeage des eaux courantes au moyen des déversoirs ... 260
Mušic (M.). — Le triangle et [illegible]
drilatère [illegible]

Pages.

les suites arithmétiques et géométriques ... 84
Milewski (N.). — Énoncé de deux théorèmes sur le triangle rectangle ... 124
Minnigerode (B.). — Sur la distribution en genres des formes quadratiques à coefficients et à variables complexes ... 273
— Sur une nouvelle méthode pour résoudre l'équation de Pell ... 274
Mittag-Leffler (G.). — Démonstration de ce théorème de Cauchy : Si une fonction $f(x)$, en chaque point pris à l'intérieur ou sur le parcours d'une ligne fermée ne se coupant pas elle-même, n'ayant pas une infinité de points anguleux et située dans le plan de la variable complexe x, reste toujours uniforme, continue et finie, et si, en chacun de ces points, elle a une dérivée finie et déterminée, l'intégrale $\int f(x)dx$ prise le long de cette ligne est nulle ... 276
Moreau (C.). — Sur les permutations ... 122
Morellet. — Mémoire sur la question des démolitions par la mine. 248
Morin (le général). — Note sur l'espace cubique et sur le volume d'air nécessaires pour assurer la salubrité des lieux habités ... 253
Neison (E.). — Catalogue d'un certain nombre de points de la surface lunaire déterminés micrométriquement ... 197
— Sur les satellites d'Uranus ... 211
— Sur l'atmosphère de Vénus ... 212
Newcomb (S.). — Sur une inégalité non encore signalée dans la longitude de la Lune ... 213
Niewenglowski (B.). — Note sur les courbes planes d'ordre n à point multiple d'ordre $n-1$ ... 123
— Sur un théorème de Jacques Bernoulli ... 123
Noble (W.). — Observations physiques de la planète Vénus ... 212
Noether (M.). — *Voir* Brill (A.), et Noether (M.) ... 272
— Sur les fonctions algébriques, cinquième Note. Deux nouveaux critériums de la correspondance uniforme des surfaces algébri-

Pages.

ques.......................... 273

Oberbeck (A.). — Sur le potentiel de l'ellipsoïde................ 218

Oberbeck (L.). — Sur les mouvements permanents d'un fluide quand on a égard au frottement intérieur... 40

Oelschläger, Stammer (W.) et Hoppe (R.). — Sur une formule connue du volume du tétraèdre......... 215

Orde Browne (C.). — Observations du passage de Vénus, faites en Égypte par la Mission anglaise... 201

Page. — De la dérivation.......... 76

Palmer (H.-S.). — Sur les récentes déterminations américaines des positions géographiques dans l'Amérique centrale et les territoires de l'Ouest........ 207

Pánek (A.). — Sur la somme des nombres cubiques.............. 80

— Méthode élémentaire pour l'étude des courbes dans le plan........ 81

— Sur la progression géométrique. 85

— Le théorème du binôme dans le Calcul des probabilités.......... 85

— Contribution au Calcul des probabilités....... 86

— Sur quelques théorèmes de Trigonométrie, pour les élèves de l'enseignement moyen.......... 86

Parmentier (Th.). — Simplification de la méthode d'interpolation de Thomas Simpson.... 124

— Note sur la comparaison des différentes méthodes d'approximation pour la quadrature des courbes.......................... 247

Pasch. — Sur la théorie du déterminant hessien................ 32

— Note sur les déterminants formés de fonctions et des dérivées de ces fonctions..................... 33

Peaucellier. — Emploi du planimètre polaire de M. Amsler dans le dessin de la fortification...... 250

— Mémoire sur les conditions de stabilité des voûtes en berceau... 254

Peaucellier et Wagner. — Mémoire sur l'amélioration des ponts-levis et des entrées des places fortes... 248

— Mémoire sur un appareil diastimométrique nouveau, dit *appareil autoréducteur*................ 248

Pelletreau. — Note sur le coefficient d'écrasement des matériaux..... 262

Peltier. — Rupture des tunnels et des ponts entre Vernon et Rouen, etc. 249

Penrose (F.-C.) — Sur un instrument destiné à la résolution des triangles sphériques par un procédé mécanique................ 206

Pepin (le P.). — Sur certains nombres complexes compris dans la formule $a+b\sqrt{-c}$............ 157

Percin. — Notice théorique et pratique sur la manœuvre du pont-levis à contre-poids constant avec spirales du colonel Devèze....... 252

Perrodil (de). — Application des équations du problème général de la résistance des matériaux au problème de la stabilité d'une voûte d'épaisseur variable traitée comme un monolithe homogène. 262

Perrodon. — Sur un appareil destiné à figurer le mouvement des projectiles oblongs dans l'air........ 78

Perry (le P.). — Sur les photographies obtenues à Manille pendant le dernier passage de Vénus..... 200

Peschka (G.-A.-V.). — Images perspectives du cercle, et détermination directe de ses diamètres.... 214

Petit. — Effet du tir sur les ouvrages de Paris (1870-1871). Brèche du fort d'Issy.............. 249

Petit et Vinclaire. — Plan du bombardement de Paris............. 249

Preil (L. v.). — Sur la manière de trouver commodément les fonctions des petits angles dans les Tables à cinq décimales......... 218

— Sur l'enseignement de la Trigonométrie....................... 219

— Quelques desiderata touchant à la Planimétrie.................. 220

— Installation de la planchette sur trois points.................... 220

Piarron de Mondésir. — Théorie de la locomotive sans foyer......... 266

Pierre. — Note sur l'approximation sur laquelle on peut compter, dans la méthode actuelle de calcul des poutres à plusieurs travées....... 260

Piotrowski (G.). — Sur des microscopes et des télescopes différents de ceux qui sont actuellement en usage....... 270

Plašil (J.). — Une analogie [illegible]

Pages.
co-physique.............. 83
.-C.). — Équation de l'ellipse
rtée à deux diamètres, ap-
iée à la théorie des vibrations
iques..................... 86
(J.-I.). — Mouvements pro-
le quelques étoiles......... 202
is photométriques sur la lu-
de la planète Vénus....... 212
MER (L.). — Contribution à
orie de la flexion du cylindre
circulaire............ 36
les vitesses de propagation
etites oscillations dans un
lre circulaire infini et iso-
.... 48
(N.-R.). — Occultation des
les, observée à Madras le
ier 1876.................. 205
- Sur le développement en
rie d'exponentielles....... 34
— Nouvel organe mécanique
oque de transformations du
ment circulaire alternatif
tiligne alternatif.......... 252
— Du soulèvement des pou-
étalliques au-dessus des cu-
.... 262
C.-L.). — Sur d'anciens des-
Saturne.................. 201
D (C.). — L'Observatoire de
ersité d'Oxford............ 194
(G.). — Sur la diffraction
lumière............... .. 272
elle méthode pour étudier
risions d'un cercle........ 273
(M.). — *Voir* FLAMANT..... 264
(A.). — Sur quelques-unes
nditions de l'action molé-
.... 258
). — Sur la vitesse du mou-
t des ondes.............. 85
DES ORGERIES. — Mémoire
poutres droites........ .. 260
I.). — Les équations fonda-
les de la Trigonométrie non
enne établies d'une manière
ıtaire................... 220
D principe de dualité dans
métrie de l'espace........ 272
(J.). — Expériences faites
9 à l'École régimentaire
avec les pyrothèques et
ouvelle machine dynamo-
que à basse tension....... 251

Pages.
RICOUR. — Mémoire sur les mines
militaires...................... 250
RIECKE (Ed.). — Sur la loi fondamentale de Weber concernant l'action mutuelle électrique, dans son application à l'hypothèse unitaire......................... 274
— Sur les lois de l'induction voltaïque........................ 276
— Sur le mouvement moléculaire de deux particules, dont l'action mutuelle est régie par la loi de Weber sur la force électrique.... 276
RIEMANN (B.). — *Voir* HATTENDORFF (K.)........................... 97
RIGAUD (G.). — Sur les papiers posthumes du professeur Rigaud..... 200
ROBINSON (F.-R.). — Sur la comparaison des lunettes achromatiques et des télescopes.............. 207
ROGERSON (G.-R.). — Sur la visibilité d'Oberon et de Titan........ 211
ROMER (P.). — Osnovnyia natchala metoda kvaternionof.... 113
ROSANES. — Sur la transformation d'une forme quadratique en elle-même......................... 29
ROUCHÉ (E.). — Réclamation de priorité........................... 121
ROULET. — Étude d'une machine élévatoire........................ 250
ROUQUET. — Note sur la continuité des racines des équations algébriques......................... 123
ROUSSET et DELAMBRE. — Étude sur la fabrication des amorces à employer pour mettre le feu aux mines au moyen de l'électricité de tension. 252
ROYSTON-PIGOTT. — Sur un oculaire destiné à l'observation du passage des étoiles..................... 204
RUBINI (R.). — Elementi di Calcolo infinitesimale. 2ª edizione....... 145
SADOUX. — Compte rendu des travaux de roctage exécutés au fort de la Croix-Faron, suivi d'observations relatives à l'emploi des dynamites et du coton-poudre comprimé........................ 254
SAINT-QUENTIN. — Note sur la machine dite *écoperche double*, employée au terrassement de la place de Douai...................... 246
SARRAU. — Sur les expériences de Rumford et la loi suivant laquelle

Pages.

la tension des produits de la combustion de la poudre dépend de leur densité.. 75

Schellbach. — Construction de la trajectoire d'un point attiré vers un point fixe d'après la loi de Newton....................... 34

Schendel (L.). — Sur la théorie des fonctions sphériques............ 30

— Sur un développement en fraction continue.................. 31

Schering (E.). — Lignes, surfaces et figures d'ordres supérieurs dans les espaces à n dimensions de Gauss et de Riemann........... 272

— La force de la pesanteur dans les espaces à n dimensions de Gauss et de Riemann................ 273

— Théorie d'Hamilton et de Jacobi pour les forces dont la mesure dépend du mouvement des corps. 274

Schmidt (J.-F.-J.). — Sur le cratère lunaire Linné.................. 259

Schönfeld (E.). — Résultats d'observations d'étoiles variables faites à l'Observatoire de Mannheim... 258

Schubert (H.). — Les caractéristiques des courbes planes du troisième ordre dans l'espace....... 275

— Les treize dégénérescences et les nombres fondamentaux des courbes planes du troisième ordre à point de rebroussement......... 277

Schwarz (H.-A.). — Mélanges sur la question des surfaces minima. 34

— Sur les surfaces minima qui sont enveloppées par un faisceau de cônes du second ordre.......... 35

Sére de Rivière. — Notice sur l'emploi de plans automoteurs dans la construction du fort du cap Brun, à Toulon.............. 246

Seydler (A.). — Sur le passage de Vénus devant le Soleil, le 8 décembre 1874............... ... 80

Siacci. — Sur les principes du tir.. 79

— Sur une question de Balistique.. 79

Siebel (A.). — Recherches sur les équations algébriques..... 214, 218

Šimerka. — Sommes des entiers contenus dans une progression arithmétique fractionnaire........... 83

Simon (M.). — Multiplication des fonctions elliptiques par des nombres entiers, dans son rapport avec le problème des polygones fermés inscrits aux courbes...... 47

Šolin (J.). — Éléments d'Arithmographie. (*Fin*)........... 81

Spitzer (S.). — Note sur les équations différentielles de la forme

$y'' = x^m(Ax^2y'' + Bxy' + Cy)$.. 218

— Note sur les équations différentielles de la forme

$(a_2 + b_2x)y'' + (a_1 + b_1x)y' + (a_0 + b_0x)y = 0$.. 220

Stammer (W.). — *Voir* Oelschläger, Stammer (W.) et Hoppe (R.).... 215

Stern (M.). — Sur une propriété des nombres de Bernoulli 47

Stoecklin. — Note sur les onglets.. 262

Stone (E.-J.). — Sur la variabilité supposée du mouvement propre de l'étoile B.A.C. 793........... 205

— Sur les mouvements propres des deux composantes du système binaire α du Centaure............ 205

— Sur le résultat le plus probable qu'on puisse déduire d'un nombre donné de déterminations directes ayant des poids assignés ....

Studnička (F.-J.) — Sur l'origine et le développement de la théorie des nombres................... 79

— Sur les séries de sommes en général et sur les nombres figurés en particulier.................. 80

— Démonstration des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique au moyen de quelques théorèmes sur les déterminants.. 80

— Comment les Arabes résolvaient les équations du troisième degré de la forme $x^3 - Px + Q = 0$. (D'après Hankel).............. 81

— Éléments de la théorie des nombres......................... 81

— Le calcul des fractions chez les Romains. (D'après Hankel)...... 81

— Théorie mathématique des gaz.. 81

— Sur l'origine et le développement de la théorie des déterminants.. 82

— Nouveaux phénomènes produits par la lumière........ 83

— Sur les quaternions........... 84

— Nouvel ellipsographe.......... 85

— Sur le développement de notre

Pages.

littérature physique pendant les cinquante dernières années...... 86
— Základové o čislek. *Kniha I:* O vlastnostech čisel prostých a jích upotřebeni.................... 147
Sturm (R.). — Suite des recherches sur les courbes gauches cubiques.................... 31 et 36
— Le problème de la projectivité dans l'espace..... 273
Tannery (J.). — Sur le plan osculateur aux cubiques gauches....... 183
— Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même. 221
Tebbutt (J.). — Phénomènes des satellites de Jupiter observés à Windsor (New South-Wales)......... 201
Tennant (le colonel). — Sur l'erreur des positions tabulaires de Vénus pendant le passage du 8 décembre 1874.......... 197
— Sur l'éphéméride des étoiles circumpolaires de M. Pritchard..... 199
Terrier (P.). — Quadrilatères et sections coniques............... 122
Thieme (F.-E.). — Calcul des valeurs limites, avec un aperçu de la théorie des courbes latérales......... 219
— Sur les droites latérales ou imaginaires....................... 219
Thomae (J.). — Sur la réduction de l'intégrale elliptique

$\int (\sin \operatorname{am} u)^{2r} du$......... 40

— Formation d'une équation différentielle intégrable au moyen de la méthode de la différentiation à indice quelconque de M. Liouville. 275
Thomé (L.-W.). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (*Suite*).......... 36
Thoyot. — Détermination du nombre minimum de freins à introduire dans les trains.......... .. 265
Tonelli (A.). — Sur la théorie de la connexion.................... 277
— Sur la fonction potentielle dans un espace à n dimensions....... 277
Vachette. — Permutations rectilignes de $3q$ lettres égales trois à trois, quand trois lettres consécutives sont distinctes; calcul de la formule générale, [illegible] tion.......... [illegible]

Pages.

Vaňous (J.-R.). — Sur une interprétation de l'équation de la parabole......................... 81
— Sur le mouvement des projectiles......................... 82
Varaigne. — Mémoire sur la réparation des ponts de chemin de fer. 248
Vassilief (A.). — De la détermination du nombre de racines des équations simultanées.......... 120
Veltmann (W.). — Critérium des intégrales singulières des équations différentielles du premier ordre.. 220
— Sur une espèce particulière de substitutions linéaires successives. 220
— Théorie de la machine à influence de seconde espèce de Holtz... .. 220
Verdal (de). — Note sur les précautions prises pour fixer les remblais du fort des Saumonards et les sables environnants......... 246
Véronique (le général). — Emploi de l'asphalte dans les constructions militaires................ 255
Vervaet (P.-J.). — Contribution à la résolution des triangles plans. 84
— Deux règles générales pour la divisibilité des nombres décimaux. 85
Villebonnet. — *Voir* Curie, de Lapparent, etc. 255
Vinclaire. — *Voir* Petit et Vinclaire. 249
Vinogradsky (V.-N.). — De la détermination des orbites des étoiles doubles...................... 114
— Détermination de l'orbite du compagnon de l'étoile μ^2 du Bouvier......................... 119
Voss (A.). — Note concernant la transformation uniforme des courbes planes..................... 273
— Sur la Géométrie des surfaces... 274
— Sur la Géométrie des figures de lignes de Plücker.............. 274
— Sur la Géométrie des surfaces focales des congruences......... 274
— Sur les complexes et les congruences...................... 276
— Sur un problème fondamental de la Géométrie plückérienne...... 276
Wagner. — *Voir* Peaucellier et Wagner......................... 248
— Sur une mire parlante spéciale imaginée par M. le garde du Génie Marc pour lire directement les études..................... 253

Pages.

— Des méthodes de levers en usage à la brigade topographique et de l'emploi d'un nouvel instrument (appareil homolographique de MM. Peaucellier et Wagner) destiné à substituer aux opérations habituelles des procédés purement mécaniques.................... 253

Warren de la Rue. — Efforts faits sur le continent pour le progrès des études d'Astronomie physique. 195

Wasserschleben (v.). — Sur la théorie du triangle équilatéral inscrit dans les sections coniques....... 216

Webb (T.-W.). — Sur l'étoile variable S d'Orion.............. 202

— Sur les deux satellites intérieurs d'Uranus...................... 206

Wilkinson (T.-T.). — Sur divers points dans la restauration des porismes d'Euclide........... 258

Winckler (A.). — I. Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — II. Integration zweier linearen Differentialgleichungen.................... 193

Winnecke (A.). — Observation de l'éclipse de Soleil du 29 septembre 1875, faite à l'Observatoire de Strasbourg..................... 201

Pages.

With (G.-H.). — Observations de la comète de Coggia............... 205

Worontzoff. — Sur les nombres de Bernoulli...................... 121

Zahradník (K.). — Géométrie du cercle à l'usage des élèves de l'enseignement moyen.............. 82

— *Voir* Durrande (H.)............ 86

— Problème sur les cercles tangents. 216

— Courbes planes rationnelles du troisième ordre................ 217

Zajączkowski (W.). — Contribution à la théorie des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables... 269

— Contribution à la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre..... 271

— Des intégrales singulières des équations différentielles ordinaires du premier ordre.............. 271

Żebrawski (Th.). — Adam Kochański et ses écrits mathématiques...... 267

— Nouvelle solution du problème de la trisection de l'angle....... 268

Zenger (V.). — Le *Stereo-Micrometer*..... 204

Żmurko (L.). — Du contact des circonférences et des sphères...... 270

TABLES GÉNÉRALES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS

CONTENUS DANS LA PREMIÈRE SÉRIE.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE DE MATIÈRES.

I. — HISTOIRE DES SCIENCES.

1.
08.
r, 15.
85.
.
i.
122.

Milliet-Dechales, 16.
Morgan (de), 16.
Murhard, 15.
Peacock, 16.
Poggendorff, 16.
Rigaud, 200.
Rogg, 16.
Smith (H.-J.-S.), 7.
Sohncke, 16.
Stokes, 7
Studnička, 79, 81, 82, 86.
Thomson (sir W.), 7.

II. — ARITHMÉTIQUE ET ANALYSE.

QUE ET ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE.

.
i, 220.
82.
.
216.
2.
85, 86.
1.
3.
80.
62.
.

THÉORIE DES NOMBRES.

Curtze, 215.
Dedekind, 278.
Dostor, 220.
Günther, 109, 216.
Lucas (É.), 122.
Lukas, 218.
Minnigerode, 273, 274.
Pepin, 157.
Studnička, 79, 80, 81, 147.

TABLES LOGARITHMIQUES. TABLES DE CARRÉS, ETC.

Baudusson, 26.
Bouché, 26.
Bürgi, 26.

Byrne, 24.
Carr, 26.
Durret (N.), 26.
Étienne, 26.
Gossart, 26.
Günther, 110.
Hertzer, 27.
Hoppe, 221.
Hoüel, 27.
Küster, 27.
Le Besgue, 27.
Oyon, 27.
Pfeil (v.), 218.
Prestet, 27
Schweizer, 27.
Thoman, 262.

ANALYSE ALGÉBRIQUE. THÉORIE DES ÉQUATIONS. DÉTERMINANTS, SÉRIES, ETC. PROBABILITÉS.

Bečka, 83.
Cockle, 255.
Dickstein, 217.
Dostor, 215, 217, 219.
Durrande, 86.
Gravelaar, 219.
Günther, 109.
Hattendorff, 275.
Kirkman, 259.
Kostka, 47.
Löwe, 217.
Meissel, 217.
Pánek, 85, 86.
Pasch, 32, 33.
Popof, 34.
Rouquet, 123.
Schendel, 31.
Siebel, 214, 218.
Stone, 206.
Studnička, 80.
Vassilief, 120.
Zahradník, 86.

THÉORIE DES FORMES. INVARIANTS, COVARIANTS, ETC. SUBSTITUTIONS.

Enneper, 277.
Faà de Bruno, 45, 277.
Fuchs, 41, 277.
Gundelfinger, 30.
Lie, 276.
Minnigerode, 273.
Rosanes, 29.
Tannery, 221.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES, ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Allégret, 156.
Catalan, 155.
Cockle, 258.
Combescure, 48.
Duhamel, 241.
Escary, 122.
Frobenius, 33, 35.
Fuchs, 41, 277.
Hamburger, 46.
Imschenetsky, 162.
Jürgens, 32.
Kowalevsky (Mme de), 27.
Laguerre, 121.
Ligowski, 217.
Mansion, 218.
Mayer (Ad.), 87, 125, 273, 276.
Mertens, 270.
Mittag-Leffler, 276.
Rubini, 145.
Spitzer, 218, 220.
Thomae, 275.
Thomé, 36.
Veltmann, 220.
Winckler, 193.
Zajączkowski, 269, 271.

FONCTIONS SPÉCIALES. NOMBRES DE BERNOULLI, ETC. QUATERNIONS.

Cayley, 45.
Du Bois-Reymond (P.), 274.
Hermite, 41, 45.
Hertz, 219.
Königsberger, 44, 277.
Laurent, 160.
Romer, 113.
Schendel, 30.
Simon (M.), 47.
Stern (M.), 47.
Studnička, 84.
Thomae, 47.
Worontzoff, 121.

III. — GÉOMÉTRIE.

TRIE ÉLÉMENTAIRE. TRIGONOMÉTRIE.

, 214.
123.
215, 216, 217.
r, 108, 215.
15, 216, 217, 218, 220.
, 218.
215, 217, 220.
84.
19.
i, 218.
n, 221.
17.
É.), 121, 124.
i, 124.
äger, 215.
81, 86.
, 206.
, 214.
.), 219, 220.
33.
r, 215.
, 84.
ník, 82, 216.
, 270.

IE ANALYTIQUE. LIGNES ET SURFACES COND ORDRE. COURBES ET SURFACES LES.

79.
119.
85.
et, 125.
72.
, 43.
r, 273, 274, 275, 276, 277.
125.
r, 123.
, 216.
270.
le la Goupillière, 122.
80.
im, 216, 219, 220.
215, 216, 217.
, 48.
218.
e, 121, 156.
É.), 120, 121, 124.
17.
glowski, 123.
272.
Schubert (H.), 275, 277.
Schwarz (H. A.), 34, 35,
Sturm (R.), 31, 36.
Tannery, 183.
Terrier, 122.
Vaňous, 81.
Wasserschleben (v.), 216.
Zahradník, 217.
Żebrawski, 267.

GÉOMÉTRIE SYNTHÉTIQUE. GÉOMÉTRIE DE SITUATION. GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE. ESPACES A *n* DIMENSIONS.

Beltrami, 233.
Brill, 272.
Escherich (v.), 111, 216.
Lipschitz, 47.
Lüroth, 274.
Nöther, 272, 273.
Réthy, 220, 272.
Schering, 272, 273.
Sturm (R.), 273.
Thieme, 219.
Tonelli, 277.
Voss, 273, 274, 276.

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE, CALCUL GRAPHIQUE, GÉODÉSIE. TOPOGRAPHIE, NIVELLEMENT.

August, 219.
Bichot, 246.
Coatpont (de), 248.
Collignon, 261.
Čubr, 80.
Delort, 255.
Goulier, 246, 248, 254, 255.
Grasset, 247.
Günther, 216.
Henry (F.), 262.
Jarolimek, 82.
Kuchynka, 82.
La Noë (de), 252.
Laussedat, 247.
Listing, 272.
Palmer, 207.
Parmentier, 124, 247.
Peaucellier, 248, 250.
Pfeil (v.), 220.
Šolin, 81.
Stoecklin, 262.
Wagner, 253.

IV. — MÉCANIQUE ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

MÉCANIQUE GÉNÉRALE. STATIQUE. DYNAMIQUE, ETC.

Beltrami, 233.
Bender, 218.
Bjerknes, 274, 275.
Boltzmann, 41.
Breton (de Champ), 156.
Durrande, 86.
Jouffret, 77, 78.
Lucas (F.), 121.
Meyer (O.-E.), 35.
Oberbeck (A.), 218.
Oberbeck (L.), 40.
Schering, 274.
Vaňous, 82.
Zahradnik, 86.

MÉCANIQUE APPLIQUÉE. HYDRAULIQUE.

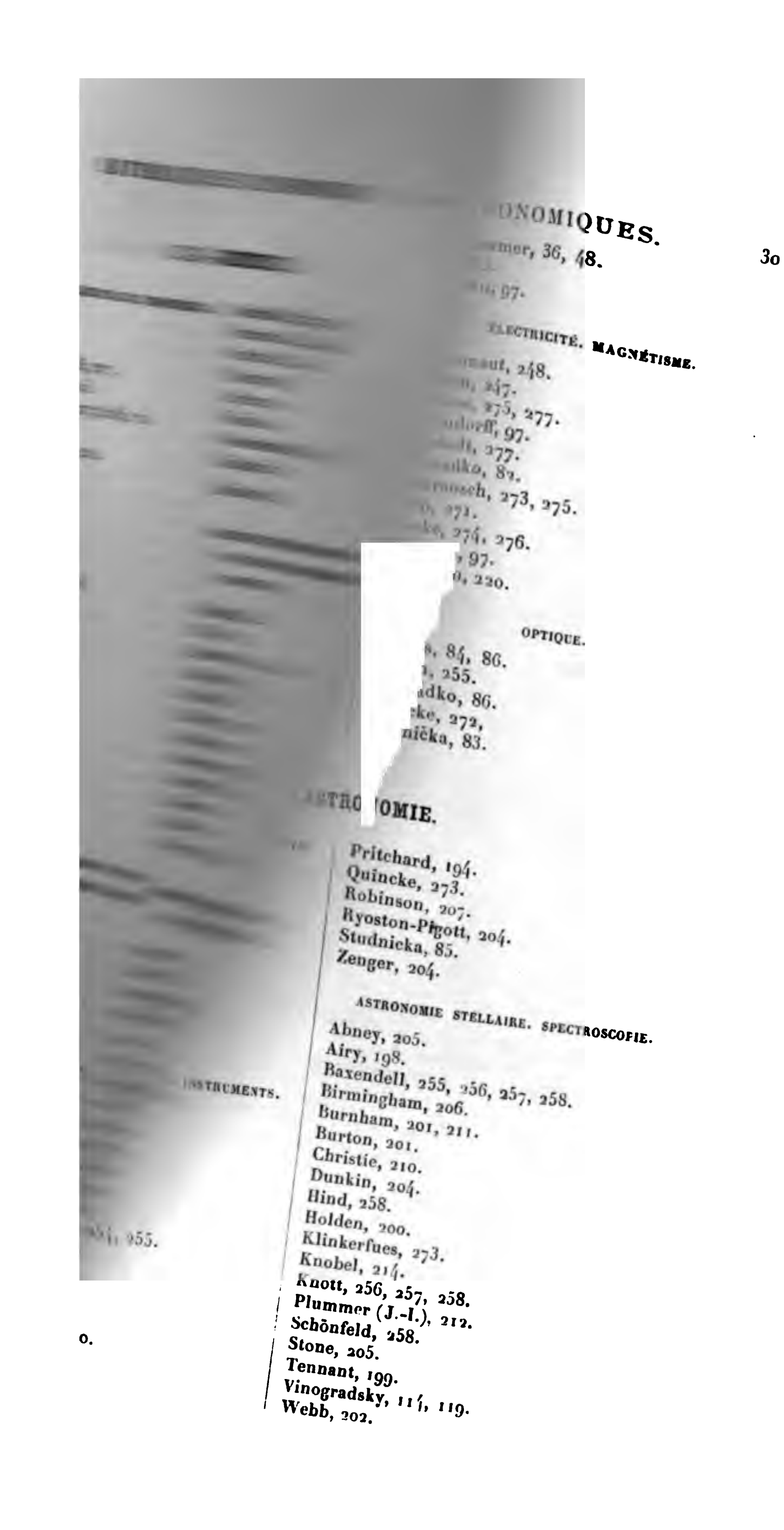
Airy, 161.
Bailly-Maître, 254.
Bazin, 260, 265.
Blondeau, 247.
Boussinesq, 264.
Bouvier, 265.
Choron, 265.
Curie, 252, 254.
Durand-Claye, 262.
Flamant, 262, 264.
Gariel, 263.
Grasset, 247.
Gueysse, 261.
Hirsch, 263, 266.
Jouart, 79.
Lavoinne, 262, 263.
Lechalas, 260.
Michal, 260.
Piarron de Mondésir, 266.
Poulain, 252.
Thoyot, 265.

ART DES CONSTRUCTIONS.

Bailly-Maître, 254.
Barisien, 248, 252.
Benoît, 247.
Bouvier, 265.
Carlier, 246.
Cètre, 265.
Choron, 265.
Corbin, 253.
Coulaine (de), 246.
Curie, 252, 254, 255.
Decomble, 261.
Delacroix, 255.
Deniéport, 246.
Devèze, 248.
Fabré, 246.
Flamant, 262, 264.
Gageot, 246.
Genet, 246.
Grillon, 250, 253.
Hennebert, 255.
Jourdain, 246.
La Gréverie (de), 247.
Lapparent (de), 255.
Le Beurriée, 255.
Lyon, 249.
Malézieux, 262, 263.
Mangin, 248.
Marcille, 254.
Massu, 255.
Merlin, 255.
Morin, 253.
Peaucellier, 248, 254.
Pelletreau, 262.
Percin, 252.
Perrodil, 262.
Pierre, 260.
Poulet, 262.
Rankine, 264.
Renoust des Orgeries, 260.
Saint-Quentin, 260.
Séré de Rivière, 246.
Varaigne, 248.
Verdal (de), 246.
Véronique, 255.
Villebonnet, 255.

ART MILITAIRE. BALISTIQUE.

Astier, 77.
Bardonnaut, 248.
Barisien, 247.
Bazin, 247.
Cézanne (de), 261.
Creuzet de la Touche, 76.
Dambrun, 249, 250.
Delambre, 250, 252.
Duchêne, 78, 79.
Fritsch, 249, 252, 254, 263.
Gariel, 263.
Goulier, 255.
Guillemot, 250.
Javary, 248, 252.
Jouffret, 75, 76, 77, 78.



…mer, 36, 48.
…97.

ÉLECTRICITÉ. MAGNÉTISME.

…ault, 248.
…247.
…275, 277.
…dorff, 97.
…277.
…82.
…rosch, 273, 275.
…272.
…ke, 274, 276.
…97.
…220.

OPTIQUE.

…84, 86.
…255.
…dko, 86.
…ke, 272.
…nička, 83.

…OMIE.

Pritchard, 194.
Quincke, 273.
Robinson, 207.
Ryoston-Pigott, 204.
Studnicka, 85.
Zenger, 204.

ASTRONOMIE STELLAIRE. SPECTROSCOPIE.

Abney, 205.
Airy, 198.
Baxendell, 255, 256, 257, 258.
Birmingham, 206.
Burnham, 201, 211.
Burton, 201.
Christie, 210.
Dunkin, 204.
Hind, 258.
Holden, 200.
Klinkerfues, 273.
Knobel, 214.
Knott, 256, 257, 258.
Plummer (J.-I.), 212.
Schönfeld, 258.
Stone, 205.
Tennant, 199.
Vinogradsky, 114, 119.
Webb, 202.

INSTRUMENTS.

…255.

o.

SOLEIL, PLANÈTES, LUNE, SATELLITES, ÉCLIPSES.

Airy, 198, 199, 201, 205.
Birmingham, 206.
Birt, 259.
Blackhouse, 199.
Brett, 213.
Brothers, 258.
Capello, 197.
Carrington, 203.
Davis, 197.
Denning, 211.
Dunkin, 211.
Gill, 196.
Gledhill, 199.
Howlett, 206.
Karliński, 269.
Knorre, 203.
Lassell, 214.
Lindsay (lord), 196.
Marth, 200.
Neison, 197, 211, 212.
Newcomb, 213.
Noble, 212.
Orde Browne, 201.
Perry (le P.), 200.
Plummer (J.-I.), 212.
Pogson, 205.
Prince, 201.
Rogerson, 211.
Schmidt (J.-F.-J.), 259.
Seydler, 80.
Tebbutt, 201.
Tennant, 197.
Webb, 206.
Winnecke, 201.

COMÈTES, ÉTOILES FILANTES.

Berg, 213.
Denning, 206.
Dreyer, 211.
Hind, 210.
Klinkerfues, 273, 274.
With, 205.

FIN DU TOME ONZIÈME.

ERRATA.

Pages.	Lignes.	*Au lieu de :*	*lisez :*
279	15	εa	$\varepsilon\alpha$
281	26	classe principale correspond,	classe correspond
286	10	système $\mathfrak{a}$ est	système $\mathfrak{o}$ est
287	25	(¹)	(²)
287	31	(²)	(³)
287	37	$\mathfrak{a}^{\mathfrak{b}}$	$\mathfrak{a}$

Au bas de la page 287, rétablir la Note oubliée :

(¹) Le nombre idéal correspondant à l'idéal $\mathfrak{ab}$ s'appellerait le *produit* des deux nombres idéaux correspondant à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.

TABLES GÉNÉRALES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS

CONTENUS DANS LA PREMIÈRE SÉRIE

DU BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES.

(TOMES I A XI; 1870-1876.)

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

ABBADIE (Ant. D'). — Géodésie d'Éthiopie. VI, 7.

— Observations relatives à la Physique du globe. VI, 7.

ALEXÉIEF (N.). — *Intégralnoïé....* Calcul intégral, t. I; 2e édition. X, 168.

ANDRÉIEF (K.-A.). — *O geometritcheskom....* Sur la représentation géométrique des courbes planes. IX, 7.

ARGAND (R.). — Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. 2e édition. VII, 145.

BACHET DE MÉZIRIAC. — Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. 3e édition. VII, 195.

BACHMANN (P.). — Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. IV, 68.

BAEYER (J.-J.). — Ueber die Grösse und Figur der Erde. IX, 241.

BALTZER (R.). — Die Elemente der Mathematik. I. Band. I, 80.

— Theorie und Anwendung der Determinanten. 3. Aufl. II, 198.

BAUER (R.-W.). — Femcifrede Logarithmer til hele Tal fra 1-15500, og Anti-Logarithmer. X, 262.

BAUSCHINGER (J.). — Elemente der graphischen Statik. III, 361.

BELLAVITIS (G.). — Riassunto delle Lezioni di Algebra. X, 67.

BERGER (Al.). — Om periodiska funktioner. VI, 72.

BERGSTRAND (P.-E.). — Fem-siffrige logaritmer till 11000. — Fem-siffriga trigonometriska logaritmer. X, 260.

BERTRAND (J.). — Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral. (Calcul intégral, 1re Partie). I, 41.

BJERKNES (C.-A.). — Sur le mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible. 1er Mémoire. III, 198.

BONSDORFF (E.-V.). — Den geometriska theorie för complexa funktioner. II, 136.

Booth (J.). — A Treatise on some new geometrical Methods. VI, 113.
Bougaïef (N.-V.). — *Outchénié*.... Théorie des dérivées numériques. X, 13.
Bouquet. — *Voir* Briot et Bouquet. VI, 65; VII, 193.
Bretschneider (C.-A.). — Die Geometrie und die Geometer vor Euclides. IV, 113.
Brill (A.). — Carton-Modelle von Flächen zweiter Ordnung. VIII, 7.
Briot (Ch.). — Théorie mécanique de la chaleur. I, 85.
Briot et Bouquet. — Théorie des fonctions elliptiques. 2e édition. VI, 65; VII, 193.
Bruhns (C.). — Nouveau manuel de logarithmes à sept décimales pour les nombres et les fonctions trigonométriques. I, 171.
Brünnow (F.), traduit par MM. *Lucas* et *André*.—Traité d'Astronomie sphérique et pratique. II, 169.
Cantor (M.). — Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. X, 161.
Casorati (F.). — Teorica delle funzioni di variabili complesse. Volume 1°. I, 16.
— Le proprietà cardinali degli strumenti ottici anche non centrati. IV, 65.
Cassani (P.). — Geometria rigorosa. V, 263.
Catalogue of Scientific Papers (1800-1863), compiled and published by the Royal Society of London. IV, 39.
Chasles (M.). — Rapport sur les progrès de la Géométrie. II, 7.
— Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie. 2e édition. IX, 97.
Chelini (D.). — Sulla composizione geometrica de' sistemi di rette, di aree e di punti. — Sulla nuova Geometria de' complessi. VII, 241.
Chiò (F.). — Théorème relatif à la différentiation d'une intégrale définie par rapport à une variable comprise dans la fonction sous le signe ∫ et dans les limites de l'intégrale, étendu au Calcul aux différences et suivi de quelques applications. III, 68.
Christoffel (E.-B.). — Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. I, 169.
Clausius (R.), traduit par *F. Folie*. — De la fonction potentielle et du potentiel. II, 65.
Clebsch (A.). — Theorie der binären algebraischen Formen. III, 225.
Copernici (N.) De revolutionibus orbium cœlestium libri VI. VI, 24.
Cremona (L.). — Preliminari di una Teoria geometrica delle superficie. I, 233.
— Le figure reciproche nella Statica grafica. IV, 65.
— Elementi di Geometria projettiva. Vol. 1°. V, 10.
— Éléments de Géométrie projective, traduits par *Ed. Dewulf*. Ire Partie. X, 65.
Curtze (M.).—Die mathematischen Schriften des *Nicole Oresme*. III, 321.
Darboux (G.). — Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, et sur la Théorie des imaginaires. V, 52.
Dillner (G.). — Grunddragen af den geometriska kalkylen. I, 249.
Duhamel (J.-M.-C.). — Éléments du Calcul infinitésimal. 3e édition. XI, 241.
Dühring (E.). — Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. IX, 98.
Durège (H.). — Theorie der elliptischen Functionen. I, 49.
— Die ebenen Curven dritter Ordnung. III, 7.
— Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse. 2. Auflage. VI, 225.
Emsmann (G.). — Mathematische Excursionen. III, 197.
Erlecke (A.). — Bibliotheca mathematica. IV, 38.
Escherich (G. v.). — Die Geometrie auf den Flächen constanter negativer Krümmung. XI, 111.
Faà de Bruno. — Théorie des formes binaires. X, 166.
Falk (M.). — Lärobok i determinant-teoriens första grunder. X, 257.
Fiedler (W.). — *Voir* Salmon (G.). VIII, 65.
— Die darstellende Geometrie. VIII, 113.
Flye Sainte-Marie (C.). — Études analytiques sur la théorie des parallèles. III, 131.
Foerster (W.). — Johann Kepler. III, 198.
Folkierski (W.). — Zasady Rachunku różniczkowego i całkowego z zastosowaniami. VII, 11.
Forti (A.). — Tavole dei logaritmi de' numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche. I, 265.

Frenet (E.). — Recueil d'Exercices sur le Calcul infinitesimal. VI, 70.
Friis (F.-R.). — Tyge Brahe. En historisk Fremstilling. III, 358.
Frischauf (J.). — Absolute Geometrie, nach Johann Bolyai. VII, 105.
Frost (P.). — An Elementary Treatise on Curve tracing. IV, 177.
Gauss (F.-G.). — Fünfstellige vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. III, 234.
— Fünfstellige vollständige logarithmisch trigonometrische Tafeln für Decimaltheilung des Quadranten. V, 261.
General-Bericht über die mittel-europäische Gradmessung. IX, 241.
Gilbert (P.). — Cours d'Analyse infinitésimale. Partie élémentaire. IV, 33.
Glaisher (J.-W.-L.). — Report of the Committee on Mathematical Tables. XI, 7.
Graindorge. — Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique. II, 199.
Grelle (Fr.). — Leitfaden zu den Vorträgen über höhere Mathematik. V, 262.
Guiraudet. — Mémoire sur le mouvement d'un point matériel sur une surface. III, 195.
Guldberg (A.-S.). — Om Ligningen af 3[die] Grad. — Om Ligningen af 5[te] Grad. IV, 35.
Günther (S.). — Studien zur theoretischen Photometrie. III, 194.
— Lehrbuch der Determinanten-Theorie für Studirende. X, 131.
— Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. XI, 108.
Gyldén (H.). — Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. — Ueber eine Methode, die Störungen eines Cometen vermittelst rasch convergirender Ausdrücke darzustellen. III, 97.
Hankel (H.). — Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. I, 117.
— Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. X, 209.
Hattendorff (K.). — Schwere, Electricität und Magnetismus, nach der Vorlesungen von Bernhard Riemann. XI, 97.
Heger (R.). — Elemente der analytischen Geometrie in homogenen Coordinaten. III, 257.
Henneberg (L.). — Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben. IX, 148.
Hermite (Ch.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. I[re] Partie. V, 49.
Herpin (A.). — Dictionnaire astronomique. X, 139.
Herr (J.-Ph.). — Lehrbuch der höheren Mathematik. 2. Auflage. VII, 51.
Hesse (O.). — Die Determinanten, elementar behandelt. I, 303.
Hirn (G.-A.). — Mémoire sur les conditions d'équilibre et sur la nature probable des anneaux de Saturne. IV, 193.
Hoefer (F.). — Histoire des Mathématiques, depuis leurs origines jusqu'au commencement du XIX[e] siècle. X, 136.
— Histoire de l'Astronomie, depuis son origine jusqu'à nos jours. X, 258.
Hoffmann (L.) und Natani (L.). — Mathematisches Wörterbuch. I, 137.
Hoüel (J.). — Cours de Calcul infinitésimal. II, 257; VII, 7.
— Eléments de la théorie des Quaternions. VIII, 9.
Hrabák (J.). — Gemeinnütziges mathematisch-technisches Tabellenwerk. VII, 49.
Imschenetsky (V.-G.). — *Voir* Todhunter (I.). VI, 22.
Jacobi (C.-G.-J.). — Vorlesungen über Dynamik. V, 145.
Jellett (J.-H.). — A Treatise on the Theory of Friction. IV, 225.
Joachimsthal (F.). — Elemente der analytischen Geometrie der Ebene. 2. Aufl. III, 166.
— Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung. IV, 36.
Jordan (C.). — Traité des substitutions et des équations algébriques. II, 161.
Kelland (P.) and Tait (P.-G.). — Introduction to Quaternions, with numerous Examples. VI, 161.
Kepleri (J.) Astronomi Opera omnia, edidit Chr. Frisch. XI, 49.
Klein (F.) et Lie (S.). — Sur les lignes asymptotiques de la surface de Kummer du quatrième ordre à 16 points singuliers. II, 72.
Klein (H.). — Die Principien der Mechanik, historisch und kritisch dargestellt. IX, 98.
Klinkerfues (W.). — Theoretische Astronomie. I. Abtheilung. I, 302.

König (J.). — Ueber eine reale Abbildung der s. g. Nicht-Euklidischen Geometrie. IV, 38.

Kopka (C.). — Formel-Sammlung aus der reinen Mathematik und aus den mechanischen Wissenschaften. IV, 179.

Kossak (E.). — Das Additionstheorem der ultra-elliptischen Functionen erster Ordnung. II, 68.

— Die elemente der Arithmetik. III, 193.

Laurent (H.). — Traité de Mécanique rationnelle. II, 193.

— Traité du Calcul des probabilité. VI, 18.

Lejeune-Dirichlet (P.-G.). — Vorlesungen über Zahlentheorie. 2. Auflage. III, 168.

Leonelli (Z.). — Supplément logarithmique. Deuxième édition, avec une Notice par *J. Hoüel*. X, 164.

Levy (M.). — La Statique graphique et ses applications aux constructions. VIII, 13.

Lie (S.). — *Voir* Klein (F.) et Lie (S.). II, 72.

— Over en Classe geometriske Transformationer. — Ueber eine Classe geometrischer Transformationen. III, 365.

Listing (J.-B.). — Ueber unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde. IX, 241.

Lucchesini (A.). — Tavole dei logaritmi comuni a sette cifre decimali. VIII, 257.

Maillard (S.). — Recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de courbes planes du troisième ordre. III, 161.

Mannheim (A.). — Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales. Applications diverses. I, 297.

Mansion (P.). — Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. I, 206.

Mathieu (Ém.). — Cours de Physique mathématique. IV, 231.

Maxwell (J.-Cl.). — A Treatise on Electricity and Magnetism. V, 241.

Mayr (A.). — Construction der Differenzial-Gleichungen aus partikularen Integralen. I, 361.

Mellberg (E.-J.). — Om ytspänningen hos vätskor. II, 137.

Meyer (G.-F.). — Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen. II, 228.

Natani (L.). — *Voir* Hoffmann (L.) und Natani (L.). I, 137.

Neovius (V.). — Lärobok i minsta qvadratmetoden. II, 134.

Neumann (C.). — Die electrischen Kräfte. IX, 193.

Newcomb (S.). — On the Investigation of the Orbit of Uranus. X, 70.

Nicolaïdès (N.). — Analectes, ou série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques. Livraisons 1 et 2. II, 71.

Oppolzer (Th. v.). — Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. 1. Band. I, 201.

Ovidio (E. d'). — *Voir* Sannia (A.) e d'Ovidio (E.). I, 329.

Painvin (L.). — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre. I, 157.

— Note sur la transformation homographique. I, 159.

— Principes de la Géométrie analytique. Géométrie de l'espace. IV, 228.

Pellucchi (S.). — Poligonometria analitica. III, 194.

Peters (C.-F.-W.). — Astronomische Tafeln und Formeln. III, 196.

Picquet. — Étude géométrique des systèmes ponctuels et tangentiels de sections coniques. III, 65.

Plateau (J.). — Statique expérimentale et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires. VI, 69.

Plücker (J.). — Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. I, 73.

Poinsot (L.). — Éléments de Statique. 11e édition. IV, 7.

Poncelet (J.-V.). — Introduction à la Mécanique industrielle, physique et expérimentale. 3e édition. II, 8.

— Cours de Mécanique appliquée aux machines. VI, 273.

Renshaw (S.-A.). — The Cone and its Sections treated geometrically. IX, 266.

Riccardi (P.). — Biblioteca matematica italiana. IV, 227.

Richelot (F.-J.). — Die Landen'sche Transformation in ihrer Anwendung auf die Entwickelung der elliptischen Functionen. II, 129.

Riemann (B.). — Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen. II, 225.

— *Voir* Hattendorff (K.). XI, 97.

Romer (P.). — *Osnovnyia....* Principes

fondamentaux de la méthode des Quaternions. XI, 113.
Rubini (R.). — Trattato d'Algebra. Parte 1ª e 2ª. VI, 21.
— Elementi di Calcolo infinitesimale. 2ª edizione. XI, 145.
Saint-Venant (de). — Sur les diverses manières de présenter la théorie des ondes lumineuses. III, 195.
Saleta (F.). — Exposé sommaire de l'idée de l'espace au point de vue positif, ou Remarques sur les principes de la Géométrie, et notamment sur le *Postulatum* d'Euclide. IV, 28.
Salmon (G.) — Leçons d'Algèbre supérieure. Traduit par Bazin. I, 54.
— A Treatise on the Higher Plane Curves. 2d Edition. V, 193.
— A Treatise on the Analytic Geometry of three Dimensions. 3rd Edition. VIII, 65.
— Analytische Geometrie des Raumes. Bearbeitet von Dr. W. Fiedler. VIII, 65.
Sands (R.-F.). — Astronomical und Meteorological Observations made during the Years 1871 and 1872 at the U. S. Naval Observatory. X, 122.
Sannia (A.) e d'Ovidio (E.). — Elementi di Geometria. 2ª edizione. I, 329.
Schleusing (R. v.). — Beitrag sur Integralrechnung. V. 260.
Schlömilch (O.). — Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. II, 66.
Schorr (F.). — Der Venusmond und die Untersuchungen über die früheren Beobachtungen dieses Mondes. X, 7.
Schulenburg (A. v. der). — Die Gleichungen der drei ersten Grade. II, 289.
Serret (P.). — Géométrie de direction. I, 9.
Simon (Ch.). — Mémoires sur la rotation de la Lune. II, 11.
Souchon (A.). — Éléments de Calcul différentiel et de Calcul intégral. III, 33.
Souvorof (F.). — *O kharakteristikakh....* Sur les caractéristiques des systèmes de trois dimensions. IV, 180.
Spitz (C.). — Erster Cursus der Differential- und Integralrechnung, I, 331.
Stolétof (A.). — *Izslédovanié....* Recherche sur le pouvoir magnétique du fer doux. IV, 126.
Studnička (F.-J.). — Základové nauky o číslek. Livre Ier. XI, 147.
Suter (H.). — Geschichte der mathematischen Wissenschaften. 1. Theil. VI, 14.
Sylow (L.). — Sur le groupe de l'équation pour la division des périodes des fonctions elliptiques. III, 199.
Tait (P.-G.). — *Voir* Thomson (W.) und Tait (P.-G.). IV, 278.
— An elementary Treatise on Quaternions. 2d edition. VI, 161.
— *Voir* Kelland (P.) and Tait (P.-G.). VI, 161.
Tchebychef (P.). — *Teoriia...* Théorie des congruences. II, 259.
— Mémoires publiés dans le Recueil de l'Académie de Saint-Pétersbourg. III, 36.
Thomson (sir W.). — Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism. V, 7 et 241.
Thomson (sir W.) und Tait (P.-G.). — Handbuch der theoretischen Physik. I.Bd. 1.Th. IV, 278.
Todhunter (I.). — *Differentsialnoïé.....* Calcul différentiel, avec un Recueil d'exemples. Traduit par V.-G. Imschenetsky. VI, 24.
— A History of the Mathematical Theories of the Attraction and the Figure of the Earth, from the time of Newton to that of Laplace. VI, 276.
Turazza (D.). — Elementi di Statica. Parte Iª : La Statica dei sistemi rigidi. IV, 28.
Valson (C.-A.). — La vie et les travaux du baron Cauchy. I, 105.
Vassal (Vl.). — Nouvelles tables donnant avec cinq décimales les logarithmes vulgaires et naturels des nombres de 1 à 10800, et des fonctions circulaires et hyperboliques pour tous les degrés du quart de cercle de minute en minute. III, 353.
Verdet (Ém.). — *OEuvres*. V, 97.
Walras (L.). — Éléments d'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale. 1re Partie. VII, 152.
Wiener (C.). — Épreuves stéréoscopiques du modèle d'une surface du troisième ordre à 27 droites réelles. I, 175.
Williamson (B.). — An elementary Treatise on the Differential Calculus. V, 158.
Winckler (A.). — I. Integration verschiedener Differentialgleichungen zweiter Ordnung. — II. Integration zweier linearen Differentialgleichungen. XI, 193.
Wolf (R.). — Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie und Astronomie. IV, 70.

Zeuthen (H.-G.) — Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. I, 139.
— Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver, med Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne i de elementære Systemer af fjerde Orden. VII, 97.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag. 6. Reihe. T. I-VI; 1867-1874. — I, 99; III, 170; VI, 105; IX, 37.
Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königlich bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. T. X et XI (1re livr.); 1866-1871. — VI, 213.
Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. T. IX-X; 1863-1871. — V, 264.
Acta Societatis Scientiarum Fennicæ. Helsingforsiæ. T. VII-IX; 1863-1871. — I, 274; VI, 108.
Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Årskrift. T. V-IX; années 1868-1872. — III, 24; VIII, 130.
Analectes, ou série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques. Par N. Nicolaïdès. Livr. 1-2; 1871. — II, 71.
Annalen der Physik und Chemie, herausgegeben von J.-C. Poggendorff. T. CXL; 1870. — II, 83.
Annales des Ponts et Chaussées. 5e Série; T. I-V; 1871-1875. — XI, 259.
Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 1re Série, t. VI-VII; 2e Série, t. I-IV; 1869-1875. — I, 27; II, 11, 263; VI, 196; X, 73.
Annali della R. Scuola Normale di Pisa. T. I, 1871. — III, 27.
Annali delle Università Toscane. T. X-XI; 1868-1869. — II, 21; III, 377.
Annali di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona. 2e série, t. I-V; 1867-1871. — I, 139, 311, 370; VI, 237.
Archiv der Mathematik und Physik, gegründet von J.-A. Grunert, fortgesetzt von R. Hoppe. T. L-LVIII; 1869-1876. — I, 100, 248, 279; III, 82, 373; IV, 278; VII, 112; VIII, 170; XI, 214.
Archiv mathematiky a fysiky, kterýž vydává Jednota Českých mathematiků v Praze. T. I; 1875-1876. — VIII, 112.
Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences de Harlem, et rédigées par T.-H. von Baumhauer. T. I-IX; 1866-1874. — III, 347; V, 279; VIII, 181.
Astronomische Nachrichten, gegründet von H.-C. Schumacher, herausgegeben von C.-A.-F. Peters. T. LXXIII-LXXX, nos 1729-1920; 1869-1873. — I, 87, 280, 363; II, 231; V, 171; VI, 166; IX, 27; X, 262.
Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. T. XX-XXVII; 1866-1874. — II, 19, 82, 148; III, 104; V, 15; VII, 135; VIII, 145.
Atti della Reale Accademia dei Lincei. Ancienne série, t. XXIV-XXVI; 1870-1872. — VI, 28; VIII, 233.
Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. V-VII; 1869-1872. — V, 267.
Berichte über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. T. XX-XXIII; 1868-1871. — V, 195.
Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg. T. XIII-XIX; 1868-1874. — I, 240; II, 299; IV, 58; VI, 32; VII, 190; VIII, 143.
Bulletin de la Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère. 3e série, t. I-II; 1869-1871. — V, 204.
Bulletin de la Société Mathématique de France. T. I; 1873. — VII, 164.
Bulletins de l'Académie Royale des Sciences de Belgique. T. XXVII-XXXII; 1869-1871. — I, 281; II, 289; IV, 55.
Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni, T. II-VII; 1869-1874. — I, 98; II, 146; IV, 243; VI, 252; VII, 120; VIII, 259.
Časopis pro pěstování mathematiky a

fysiki, kterýž se zvláštnim zřetelem k studujícím rediguje Dr. F.-J. Studnička. T. I-IV; 1872-1875. — VI, 88; VII, 260; VIII, 122; XI, 79.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. LXX-LXXXI; 1870-1875. — I, 29, 63, 154, 211, 254, 316, 334, 377; II, 203, 241, 276, 330; III, 54, 94, 107, 148, 213, 295; IV, 72, 127; V, 120; VI, 42, 76, 116, 285; VII, 153, 197; VIII, 37, 67, 161; IX, 149, 199.

Forhandlinger ved de Skandinaviske Naturforskeres tiende Möde. Christiania, 1868. — I, 282.

Giornale di Matematiche, pubblicato da G. Battaglini. T. VII-XIII; 1869-1875. — I, 152, 219, 286, 331; II, 142; III, 171; IV, 196, 254; VI, 110; VII, 90; VIII, 32; X, 278.

Jahrbuch über die gesammten Fortschritte der Mathematik; herausgegeben von C. Ohrtmann und F. Müller. T. I, année 1868. — III, 129.

Journal de l'École Polytechnique. T. XXVI, xliiie Cahier. — I, 269, 297.

Journal de Mathématiques pures et appliquées; publié par J. Liouville (continué par H. Resal). 2e Série, t. XIV-XIX; 3e Série, t, I; 1869-1875. — I, 91; II, 33; III, 88, 379; VI, 125; VIII, 17; IX, 121; XI, 155.

Journal des Actuaires français. T. I; 1872. — III. 169.

Journal für die reine und angewandte Mathematik; gegründet von A.-L. Crelle, fortgesetzt von C.-W. Borchardt. T. LXXII-LXXX; 1869-1875. — I, 24: III, 138, 238, 258, 367; IV, 87, 233; V, 283; VI, 188; VII, 223, 248; VIII, 17; IX, 176; XI, 27.

Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny följd. Stockholm. T. V-VIII; 1863-1869. — I, 242; VI, 36.

Matematitcheskii Sbornik, izdavaïémyi Moskovskim Matematitcheskim Obchtchestvom. T. I-VII; 1866-1874. — III, 11, 70, 200; V, 292; VI, 314; VII, 233; X, 96.

Mathematische Annalen, begründet von A. Clebsch und C. Neumann, fortgesetzt von F. Klein und A. Mayer. T. I-VIII; 1869-1875. — I, 124; II, 173, 235, 353; III, 327; VIII, 78, 115, 209; X, 175.

Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse. 7e série, t. I-III; 1869-1871. — V, 100.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. T. II-VIII; 1861-1872. — V, 60.

Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liége. 2e série, t. III; 1873. — VI, 37.

Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester. 3e série, t. II-III; 1865-1868. — I, 162.

Memoirs of the Royal Astronomical Society of London. T. XXXVI-XXXIX; 1867-1872. — I, 238; V, 158.

Mémorial de l'Officier du Génie. 2e série; t. XVI-XXIV; 1854-1875. — XI, 274.

Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. 2e série, t. VII-X; 3e série, t. I-II; 1868-1872. — I, 219; IV, 247.

Monatsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Années 1869-1874. — I, 187; IV, 200; VI, 40; VII, 131; X, 285.

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London. T. XXX-XXXVI; 1870-1876. — II, 149; III, 245; V, 103; VI, 299; VII, 15, 53; IX, 9, 107, 267; X, 37, 86; XI, 149, 194.

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts Universität zu Göttingen. Années 1868-1872. — I, 238; III, 42; IX, 186, 276; XI, 272.

Nieuw Archief voor Wiskunde. T. I; 1875. — VIII, 159.

Nouvelle Correspondance mathématique; publiée par E. Catalan et P. Mansion. T. I; 1875. — VIII, 217; X, 146.

Nouvelles Annales de Mathématiques, rédigées par MM. Gerono et Brisse, 2e série, t. IX-XV, 1870-1876. — I, 157, 159; II, 75; IV, 40; VI, 178; VIII, 25; IX, 173; X, 32; XI, 120.

Nova acta regiæ Societatis Scientiarum Upsalensis. 3e série, t. VI-VII; 1866-1870. — I, 247; V, 168.

Öfversigt af kongl. Vetenskaps-Akademiens förhandlingar. Stockholm. T. XXII-XXVII; 1865-1870. — I, 245; VI, 34.

Outchonyia Zapiski Imper. Kazanskavo Ouniversiteta. Année 1872. — XI, 114.

Pamiętnik Towarzystwa nauk ścisłych w Paryżu. T. I-III; 1871-1873. — VI, 148.

Periodico di Scienze matematiche e na-

turali per l'insegnamento secondario. T, I; 1873-1874. — VII, 106.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London. T. CLVII-CLXII; 1867-1872. — I, 181, 365; VI, 228.
Proceedings of the American Association for the Advancement of Science. Cambridge (Mass.); 1868. — III, 154.
Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. T. XI, 1866-69. — I, 237.
Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. T. V-VII; 1865-1868. — XI, 255.
Proceedings of the London Mathematical Society. T. I-IV; 1865-1873. — III, 344; IV, 45; VII, 25.
Proceedings of the Royal Irish Academy. Dublin. 1re série, t. VIII-X; 2e série, t. I; 1861-1872. — I, 309; VII, 181.
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Années 1869-1871. — II, 274; V, 164.
Proceedings of the Royal Society of London. T. XVIII-XXI; 1869-1873. — VII, 73.
Programmes des Gymnases et des Realschulen de Berlin. Années 1871-1875. — X, 242.
Programmes publiés par les Écoles allemandes sur des sujets mathématiques. Années 1871-1874. — X, 290.
Pubblicazioni del Reale Osservatorio di Brera in Milano. Nos 1-10. — X, 251.
Publications danoises. — VII, 86; VIII, 140.
Publications norvégiennes. — VI, 255.
Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics; edited by J.-J. Sylvester and N.-M. Ferrers. T. XI-XII; 1870-1873. — II, 267; VI, 204.
Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Milano. T. II; 1869. — I, 188.
Revue d'Artillerie. T. I-VII; 1872-1876. — XI, 74.
Rivista di Giornali; pubblicata da G. Bellavitis. Nos X-XII; 1870-1874. — III, 289; X, 141.
Rivista scientifico-industriale delle principali scoperte ed invenzioni fatte nelle scienze e nelle industrie; compilata da G. Vimercati. T. III-IV; 1871-1872. — V, 17.
Roczniki C. K. Towarzyrstwa naukowego Krakowskiego. 3e série; t. VII, X, XII, XVI, XIX; 1862-1871. — XI, 267.
Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Années 1870-1874. — VI, 102; VIII, 229; IX, 49.
Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. T. LVIII-LXVIII, 1868-1873. — I, 208; VII, 138, 203; VIII, 223.
Société des Sciences naturelles du Grand-Duché de Luxembourg. T. X; 1867-1868. — I, 304.
Tidskrift för matematik och fysik, utgifven af G. Dillner, F.-W. Hultman och T.-R. Thalén. — T. II-V; 1869-1874. — I, 177, 249, 295; III, 219; X, 170.
Tidsskrift for Mathematik. Anden Række. udgivet af C. Tychsen; t. V.-VI; 1869-1870. Tredie Række, udgivet af H.-G. Zeuthen; t. I-IV; 1871-1874. — I, 179, 369; II, 15; V, 277; VII, 29; VIII, 137.
Tijdschrift voor reken-, stel- en meetkunde; uitgegeven van wege de Gewestlijke Vereeniging Noord-Holland van het Nederlandsch Onderwijzers-Genootschap. — IV, 204.
Transactions of the Cambridge Philosophical Society. T. XI, 1866-1869. — I, 215.
Transactions of the Royal Irish Academy. Dublin. T. XXIII-XXV; 1856-1872. — I, 306; VII, 174.
Transactions of the Royal Society of Edinburgh. T. XXV-XXVI; 1867-1872. — I, 159; II, 200; V, 57.
Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. 2de Reeks. T. III-VII; 1869-1872. — I, 186; VII, 126.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Années V-VII; 1870-1872. — I, 289; II, 321; III, 16; IX, 227.
Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich; redigirt von Dr R. Wolf. T. XV-XVIII; 1870-1873. — IV, 50; V, 203; VII, 34; VIII, 269.
Werken, uitgegeven door het Wiskundig Genootschap onder de zinspreuk: « Een onvermoeide arbeid komt alles te boven ». Amsterdam. — IV, 209.
Zeitschrift für Mathematik und Physik; herausgegeben von O. Schlömilch, E. Kahl und M. Cantor. T. XIV-XX;

1869-1875. — I, 59, 275; II, 137; III, 290; IV, 283; VI, 247; VIII, 185; IX, 233, 280.

Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht; herausgegeben von J.-C.-V. Hoffmann. T. I-V; 1870-1874. — III, 48; IV, 205; V, 169; VII, 93; VIII, 226.

Zprávy Jednoty českých mathematiků. Années 1870-1872. — VI, 97.

MÉLANGES.

Académie des Sciences. — Séance publique du 11 juillet 1870. Prix décernés pour les Sciences mathématiques. — I, 254.

André (Ch.). — Sur la parallaxe du Soleil déduite des observations méridiennes de Mars en 1862. — II, 89.

— De l'emploi des petites planètes pour la détermination de la parallaxe du Soleil. — III, 274; VI, 60.

Anonyme. — Sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches. — I, 228.

Beltrami (E.). — Formules fondamentales de Cinématique dans les espaces de courbure constante. — XI, 233.

Bertrand (J.). — Discours prononcé aux funérailles de G. Lamé. — I, 189.

Bonnet (O.). — Démonstration de la continuité des racines d'une équation algébrique. — II, 215.

Borchardt (C.-W.). — Sur l'ellipsoïde de volume minimum parmi ceux dans lesquels un certain nombre de sections centrales ont des aires données. — V, 301.

— Sur la transformation des équations de l'élasticité en coordonnées orthogonales générales. — VIII, 191.

Bouquet (C.). — De l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre. — III, 265.

Catalan (E.). — Réclamation de priorité. — I, 197.

Cauchy (A.-L.). — Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires. — VII, 265; VIII, 43, 148.

Clebsch (A.). — Annonce de sa mort. — III, 384.

— Sur un nouvel élément fondamental de la Géométrie analytique du plan. — VIII, 234.

Combes. — Discours prononcé aux funérailles de G. Lamé. — I, 191.

Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. — VIII, 287; IX, 38, 51, 126.

Cours de la Faculté des Sciences de Paris pendant le second semestre de l'année 1869-1870. — I, 166.

Cours de Mathématiques du Collége de France pendant le second semestre de l'année 1869-1870. — I, 196.

Curtze (M.). — Notice sur la vie de Jean-Auguste Grunert. — III, 285.

— Extrait d'une Lettre à la Rédaction du *Bulletin*. (Sur des manuscrits de Nicole Oresme). — VI, 57.

Darboux (G.). — Sur les systèmes linéaires de coniques et de surfaces du second ordre. — I, 348.

— Note sur un Mémoire de M. Dini. — I, 383.

— Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques. — II, 23, 184, 221, 314; III, 221, 251, 281.

— Sur une surface du 5[e] ordre et sa représentation sur le plan. — II, 40.

— Sur la représentation des surfaces algébriques. — II, 155.

— Sur une classe particulière de surfaces réglées. — II, 301.

— Sur la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde et sur les coordonnées elliptiques. — III, 122.

— Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions. — III, 307.

— Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre. — IV, 158.

— Mémoire sur le théorème de Sturm. 1[re] Partie. — VIII, 92.

— Sur la première méthode donnée par Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. — VIII, 249.

— Sur la composition des forces en Statique. — IX, 281.

— Sur la théorie de l'élimination entre deux équations à une inconnue. — X, 56.

Dedekind (R.). — Sur la théorie des nombres entiers algébriques. Introduction. — XI, 278.

Dewulf (Ed.). — Sur les tranformations géométriques des figures planes. — V, 206.

— Des tranformations rationnelles dans l'espace. Travaux de M. Cremona.— VII, 37.

— Note sur un théorème de M. G. Bruno. — VII, 142.

Diorio (V.). — Sur la vie et les travaux de Mgr. D. Barnabé Tortolini. — VIII, 272.

Ermakof (V.). — Caractère de convergence des séries. — II, 250.

Falk (M.). — Sommation de quelques séries. — X, 204.

Faye. — Paroles prononcées aux funérailles de M. Delaunay, au nom de l'Académie des Sciences. — III, 317.

Funérailles de G. Lamé. Discours de MM. Bertrand, Combes et Puiseux. — I, 189.

Gilbert (Ph.). — Envoi d'un Mémoire « Sur une propriété des déterminants fonctionnels et son application au développement des fonctions implicites ». — I, 198.

Hermite. — Sur l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin \alpha \, dx}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$$

I, 320.

— Sur la construction graphique de l'équation relative à l'addition des intégrales elliptiques de première espèce. — II, 21.

— Sur une équation transcendante. — IV, 61.

Hesse (O.). — Des relations analytiques entre six points situés sur une conique. — I, 33.

— Sur un théorème relatif à six des huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre. — I, 196.

Hoüel (J.). — Notice sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatchefsky. — I, 66, 324, 384.

Imschenetsky (V.). — Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. (*Introduction*). — I, 164.

— Application des expressions complexes imaginaires à la formation de certains systèmes complétement intégrables d'équations canoniques et d'équations aux dérivées partielles. — XI, 162.

Jacobi (C.-G.-J.). — Correspondance mathématique avec Legendre. — VIII, 291; IX, 38, 51, 67, 74, 82, 89, 126, 132, 133, 138.

Jamin. — Discours prononcé aux funérailles de M. Duhamel, au nom de l'Académie des Sciences. — III, 314.

Klein (F.). — Sur la Géométrie dite *non-euclidienne*. — II, 341.

Kronecker (L.). — Sur la théorie algébrique des formes quadratiques. — IV, 256.

Laguerre. — Application du principe du dernier multiplicateur à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre. — II, 246.

— Sur une propriété de l'hyperboloïde de révolution. — II, 279.

Lamé (G.). — Liste de ses travaux et des fonctions qu'il a occupées. — I, 224.

Legendre (A.-M.). — Correspondance mathématique avec Jacobi. — VIII, 299, 302; IX, 44, 61, 63, 65, 71, 80, 87, 92, 129, 136, 140.

Lespiault (G.). — Question de Mécanique. — IV, 293.

Levy (M.). — Note sur les équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité en coordonnées curvilignes. — VI, 214.

Lipschitz (R.). — Extrait d'une Lettre. Sur un nouveau théorème de Mécanique. — III, 349.

— Extrait de six Mémoires publiés dans le *Journal de Mathématiques* de Borchardt: 1 et 2. Recherches sur les fonctions entières et homogènes de *n* différentielles. IV, 97, 142. — 3. Recherches sur un problème du calcul des Variations, qui renferme le problème de la Mécanique. IV, 212. — 4 et 5. Développement de quelques propriétés des formes quadratiques de *n* différentielles. IV, 297, 308. — 6. Développement d'une dépendance entre les formes quadratiques de *n* différentielles et les transcendantes abéliennes. IV, 314.

— Sur la possibilité d'intégrer complétement un système donné d'équations différentielles. — X, 149.

MANNHEIM (A.). — Théorème de Géométrie. — I, 198.
— Détermination simple et rapide d'une équation des surfaces du second ordre contenant six points donnés. — II, 125.
— Remarque sur une classe générale de surfaces, et en particulier sur la surface lieu des points dont la somme des distances à deux droites fixes est constante. — III, 119.
MANSION (P.). — Sur les travaux de Jules Plücker. — V, 313.
MAYER (A.). — Sur les systèmes absolument intégrables d'équations linéaires aux différentielles totales, et sur l'intégration simultanée des équations aux différentielles partielles. — XI, 87, 125.
NICOLAÏDÈS (N.). — Sur quelques surfaces à courbure constante. — IX, 242.
PAINVIN (L.). — Étude d'un complexe du second ordre. — II, 368.
— Sur la théorie des caractéristiques. — III, 155.
— Courbure d'une courbe plane, donnée par son équation tangentielle. — III, 174.
— Sur les surfaces algébriques. — IV, 91.
— Sur l'abaissement de la classe d'une courbe produit par la présence d'un point de rebroussement. — IV, 131.
— Note sur l'intersection de deux courbes. — V, 138.
— Annonce de sa mort. — IX, 145.
— Liste de ses travaux. — IX, 188.
PELLET (E.). — Note sur les podaires obliques. — III, 278.
PLANA (J.). — Liste de ses ouvrages et de ses Mémoires. — V, 65.
PLÜCKER (J.). — Liste de ses travaux. — III, 59.
PUISEUX (V.). — Discours prononcé aux funérailles de M. LAMÉ. — I, 194.
— Discours prononcé aux funérailles de M. DELAUNAY, au nom du Bureau des Longitudes. — III, 319.
Question mise au concours pour l'année 1873 par la Société Royale Danoise des Sciences et des Lettres de Copenhague. — V, 191.
QUETELET (E.). — Notice sur l'Observatoire Royal de Bruxelles. — X, 106.
RESAL (H.). — Du mouvement relatif d'un point pesant sur une courbe comprise dans un plan vertical tournant d'un mouvement uniforme autour d'un point de ce plan. — III, 29.
RIEMANN (B.). — Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique. — V, 20, 79.
SERRET (J.-A.). — Mémoire sur le principe de la moindre action. — II, 97.
SIMON (Ch.). — Note sur la formule de Gompertz et sur son application au calcul des probabilités de la vie humaine. — II, 282.
TANNERY (J.). — Sur le plan osculateur aux cubiques gauches. — XI, 183.
— Sur les substitutions linéaires par lesquelles une forme quadratique ternaire se reproduit elle-même. — XI, 221.
WOLF (R.). — François-Xavier de ZACH. — VI, 258.
ZEUTHEN (H.-G.). — Note sur le principe de correspondance. — V, 186.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Abbadie (d'). I, 319, 335, 377; VI, 7; IX, 153, 162.
Abbati. X, 145.
Abbay. III, 247.
Abbe. I, 388; III, 154.
Abbott (F.). III, 250.
Abbott (R.). II, 158; VI, 206.
Abel. III, 130; VI, 189; X, 146.
Abendroth. X, 300.
Abetti. V, 179.
Abney. IX, 19; X, 51, 92; XI, 205.
Abonné. I, 228.
Abria. V, 60, 62.
Académie des Sciences. I, 254.
Achard. III, 169.
Acquoy. IV, 204.
Adams. I, 218; III, 249.
Adolph. V, 184; VI, 169.
Affolter. III, 291, 335; VI, 111; VII, 94, 116; VIII, 122, 177; XI, 214.
Aichinger. X, 296.
Airy. I, 182, 184, 186, 218, 367; II, 149, 154; V, 105, 106; VI, 236, 237, 313; VII, 15, 53, 78, 79, 80, 82, 83; IX, 9, 14, 15; X, 37, 43, 47, 50; XI, 161, 198, 199, 201, 205.
Akerlund. X, 172.
Albeggiani. IV, 255; VIII, 34; X, 278, 280.
Albenque. III, 216.
Albrich. I, 358; III, 85, 377.
Alembert (d'). III, 130; X, 142.
Alexandre. II, 79.
Alexéief. III, 11, 13, 15, 203; IX, 47; X, 168.
Allégret. I, 215; II, 75; VI, 182, 203; VII, 170, 201; XI, 156, 157.
Almqvist. I, 296; X, 170, 173.
Alverà. X, 296.
Amanzio. VIII, 33.
Amberg. X, 293.
Amigues. IV, 41, 42; VII, 159.
Amstein. V, 204.
Andalò di Negro. VIII, 265.
Andersson. VIII, 132, 134; X, 271.
Andræ (v.). I, 89; IX, 28.
André. XI, 79.
André (C.). II, 89; III, 274; IV, 112; VI, 45, 60, 81, 82, 319; VII, 144; VIII, 74, 164; IX, 154, 161.
André (D.). IV, 41, 43, 44, 45; VI, 183, 185, 188; VII, 166; VIII, 25, 26, 28; X, 33.
Andréief. VI, 318; IX, 7.
Andréiefsky. III, 74, 76, 211, 339, 343; V, 294.
Andres. III, 375.
Andrews. I, 365; VII, 73.
Angelitti. X, 282.
Angot. VIII, 74.
Ångström. I, 293.
Anonyme. I, 228; II, 76; IV, 43; V, 177; VIII, 130, 139; X, 293.
Ansart. VI, 272.
Ansted. VII, 78.
Antonelli. VI, 253.
Aoust. I, 28, 213, 314, 372; IV, 271; VI, 245; VII, 156, 158, 159, 198; VIII, 256; XI, 192.
A...r. X, 172.

Arcais (d'). III, 28.
Argand. VII, 145, 192; VIII, 221.
Argelander, I, 39, 90, 274, 280; II, 321; III, 17; IV, 59; V, 183, 186; IX, 31, 227; X, 267.
Arlincourt (d'). VI, 203.
Armenante (A.). I, 153, 154; VI, 240; VII, 90; VIII, 36; X, 280.
Armenante (F.). VII, 91.
Arntzen. II, 158.
Aron. VII, 254.
Aronhold. VI, 184.
Arumis. XI, 199.
Arzelà. II, 143; VII, 92, 110; VIII, 36.
Aschieri. I, 220, 332; III, 27; IV, 255; VI, 111; VII, 91; VIII, 32, 33, 37; X, 283.
Ascoli. VI, 238, 242; VIII, 118.
Asten. VII, 191.
Astier. XI, 77, 79.
Astolf. III, 106.
Åstrand. I, 246; II, 127; X, 266.
Augier. IV, 42.
August. VII, 118; VIII, 180; X, 244, 293; XI, 219.
Aussem. X, 300.
Autenheimer. III, 190.
Auwers. I, 187; VI, 303; VII, 132, 133; IX, 10, 11; X, 287, 288.
Avout (d'). VI, 121.
Azzarelli. III, 104, 105, 106; V, 16; VII, 135, 136; VIII, 146, 147; X, 144.
Bach. I, 29; X, 73.
Bachet de Meziriac. VII, 195.
Bachmann. III, 141, 192; IV, 68, 87; VI, 196; IX, 280; X, 146.
Bäcklund. III, 25; VIII, 130, 133, 134.
Badon Ghijben. IV, 211, 212.
Baehr. III, 289, 348; IV, 211, 212, 224; V, 279, 283; VII, 126, 127, 128, 129.
Baeyer. IX, 241; X, 289.
Baillaud. I, 28; IV, 130; V, 121; VI, 45; VII, 199.
Baille. V, 136.
Bailly-Maître. X, 255; XI, 254.
Bakhuyzen. X, 272.
Baldi. VI, 255.
Ball. I, 308; II, 272; IV, 176; V, 115; VI, 206, 207; VII, 85, 174, 175, 176, 187.
Baltzer. I, 80, 230; II, 159, 198; III, 241, 245; V, 199; VIII, 64.
Bammert. II, 159.
Bangma. IV, 210.
Barbarin. X, 33.
Barber. X, 272.
Barchauck. X, 290.
Barclay. VI, 232.
Barczynski. IV, 286.
Bardelli. V, 241.
Bardey. I, 388; V, 170.
Bardonnaut. XI, 248.
Bardy. III, 119.
Barillari. II, 145.
Barisien. VII, 240; XI, 247, 248, 252.
Barker. X, 44.
Barlet. III, 96.
Barlow. VII, 75.
Barnery. IX, 17.
Barthel. III, 296.
Barthélemy. III, 96; VII, 199, 201.
Bashforth. I, 184.
Bassac. I, 39.
Battaglini. I, 152, 153, 220, 286; II, 142, 143, 145; III, 171; IV, 198, 199, 200, 254, 255; VI, 30, 110; VII, 92; VIII, 35, 36, 233, 234; X, 279, 281.
Baudrimont. V, 60, 61.
Baudusson. XI, 26.
Baudys. XI, 84, 86.
Bauer. I, 25; X, 290.
Bauer (K.-L.). VIII, 227, 228.
Bauer (R.-W.). X, 262.
Bauernfeind. II, 159; IV, 279; VI, 213, 214.
Baumhauer (v.). III, 214, 347; VIII, 183.
Bauquenne. X, 145.
Baur. I, 60, 62, 388; IV, 290; X, 300.
Bauschinger. III, 361, 384; IV, 292.
Baxendell. I, 163; XI, 255, 256, 257, 258.
Bazin. XI, 247, 260, 265.
Beaujeux. II, 79.
Beaumont (Élie de). II, 210; VI, 296.
Bebber (van). VIII, 228.
Beck. VI, 252; VII, 36.
Bečka. XI, 83, 85.
Becker. (E.), I, 388; VI, 167, 173; IX, 30; X, 277.
Becker (F.). I, 388; X, 290.
Becker (J.-C.). I, 59, 61; III, 53, 160, 294; IV, 207, 287; V, 169; VI, 250; VII, 94; VIII, 190.
Beckmann. III, 53.
Becquerel. IV, 83, 84.
Becquerel (E.). III, 211.
Beer (W.). II, 159.
Beez. VIII, 213.
Belgrand. IV, 128, 129; V, 137.
Bellachi. X, 143.
Bellavenetz. VII, 77.
Bellavitis. II, 75; III, 289; VI, 185; VII, 239; VIII, 26; X, 67, 141, 143, 144, 145.

Bellucci. V, 20.
Beltrami. I, 29, 136, 189, 219, 314, 315; II, 159; III, 173, 290; IV, 197, 198, 199, 247, 252, 256; VI, 111, 244; X, 142; XI, 233.
Bender. VIII, 180; XI, 218.
Benigar. VII, 209.
Benoît. XI, 247.
Benthem. VIII, 160.
Berg (Fr.-W.). I, 230, 389; IX, 26; X, 100; XI, 211, 213.
Berger (A.). VI, 72.
Berger (G.). II, 128.
Bergsma. III, 305; VII, 127.
Bergstrand. X, 260.
Bermann. III, 375; VIII, 177; X, 300.
Bernaerts. II, 292.
Bernardinis (de). III, 172.
Bernoulli (Jean). III, 130.
Bernstein. IV, 203.
Berruti. V, 267, 273.
Bertelli. IV, 245; V, 18; VII, 120, 137.
Berthold. X, 288.
Bertin. I, 39; V, 123; VI, 272, 296; VII, 144, 239.
Bertini. I, 153; III, 27; VII, 107, 110.
Berton. III, 302.
Bertrand (J.). I, 29, 39, 41, 63, 189, 196, 316, 344; II, 244, 335, 338, 340; III, 54, 130; IV, 7, 41, 78, 81; V, 135, 145; VI, 116, 121, 124; VII, 198, 199; IX, 125, 225, 226; X, 146.
Besant. I, 71; II, 269, 272; IV, 45; VI, 212.
Besge. VI, 135; VIII, 21, 24.
Bessel (A.). I, 129; III, 15.
Bessel (F.-W.). IX, 288.
Besso. I, 153; IV, 198, 199; VII, 106, 110; VIII, 32.
Bette. I, 230.
Betti. I, 131, 312, 314; II, 21; III, 290; VI, 240; X, 146.
Beyer. X, 296.
Beyer (v.). III, 79, 202.
Béziat. II, 77.
Biadego. VI, 252; VII, 121.
Bianco. IX, 95.
Bichot. XI, 246.
Bidder. IX, 25.
Biehringer. IV, 289; VI, 252.
Bienaymé. I, 39, 381; II, 203; VI, 135; IX, 219.
Bierbaum. X, 293.
Bierens de Haan. I, 187; II, 256; III, 348; IV, 212; V, 280, 283; VI, 64, 253; VII, 121, 128, 129; VIII, 160, 182, 260.
Bille. I, 359.
Bing. VIII, 140.
Birmingham. II, 233; IX, 12, 17, 26; X, 272; XI, 206.
Birt. III, 249; XI, 259.
Bishop. IX, 12.
Bitonti. I, 224, 333, 334; II, 144.
Bjerknes. I, 284; III, 198; XI, 274, 275.
Björling (C.-F.-E.). I, 100, 246, 247, 359; II, 159; V, 168; VI, 34; VII, 119.
Björling (E.-G.). I, 246, 296; II, 159.
Blackhouse. XI, 199.
Blaserna. III, 115.
Blavet. VIII, 123, 130.
Blažek. VI, 90, 92, 102; VIII, 123, 130; IX, 50; XI, 82.
Bloek. VII, 215.
Bloem. IV, 204.
Blondeau, XI, 247.
Blondel. IV, 130.
Blum. III, 190.
Bobylef. VIII, 117, 213.
Bode. IV, 208; X, 290, 296.
Boehmer. X, 300.
Boguslawski (v.). V, 175; IX, 235.
Bohme, X, 290.
Bohnstedt. X, 300.
Boidi. II, 159.
Boije. I, 296.
Boileau. I, 97.
Boillot. II, 246.
Böklen. X, 145.
Bolten. IV, 210.
Boltzmann. I, 208, 209, 210, 211, 276; III, 242; VII, 210, 212, 218, 219; VIII, 223; XI, 41.
Bolyai. V, 61.
Bolze. III, 50.
Bonanzia. X, 142.
Boncompagni. I, 98, 99; II, 147; IV, 244, 245, 246; VI, 253, 255; VII, 120, 121, 124, 126; VIII, 262, 265.
Bonnange. VI, 272.
Bonnet (O.). I, 261; II, 215; VIII, 169; IX, 169.
Bonolis. VI, 110; VII, 90, 92; VIII, 34.
Bonsdorff. II, 136.
Bontemps. VII, 159, 162.
Boole. I, 218; X, 142.
Booth. I, 314; VI, 113.
Boquel. IV, 176.
Borch. VIII, 138.
Borchardt. V, 285, 301; VI, 41; VII, 131, 133; VIII, 191, 287; IX, 185.
Börgen. II, 231; III, 17; V, 178, 179; VI, 174; X, 268.

Borius. VIII, 256.
Börner. VIII, 226; X, 296.
Borrelly. II, 337; IV, 128, 130; V, 121, 122, 123; VI, 81, 170, 177; VIII, 42; X, 276, 277.
Börsch. X, 293.
Borsendorff. I, 167.
Bosramier. II, 210.
Bosscha. V, 281; VII, 127, 128.
Bösser. II, 138.
Bossert. V, 121, 123; X, 277.
Bouché. XI, 26.
Bouchon-Brandely. VII, 121.
Boudin. III, 96.
Boué. VII, 220.
Bougaïef. III, 11, 13, 14, 15, 16, 71, 117, 200; V, 296, 298; VI, 314; VIII, 30; X, 13, 102.
Boulyghinsky. III, 207.
Bouniakofsky. I, 240; II, 299, 300, 301; V, 294.
Bouquet (C.). I, 167, 340; III, 265; V, 319; VI, 65, 272; VII, 193; X, 74.
Bouquet de la Grye. VIII, 78, 164.
Bour. VII, 239.
Bourdin. II, 210.
Bourdon. IV, 111.
Bourget. I, 66; II, 81, 82, 242; III, 58, 89, 300; IV, 43, 72, 86; V, 124; VI, 132, 159; VII, 166.
Bourguet. XI, 125.
Boussinesq. I, 30, 32, 96, 157, 338, 379; II, 37, 214, 241, 276, 330, 331, 334; III, 58, 90, 95, 112, 113, 117, 215, 296, 381, 383; IV, 73, 74, 80, 83; V, 135; VI, 44, 82, 131, 138, 139, 288, 297; VIII, 42, 162, 165; XI, 192, 264.
Boussingault. VI, 319.
Bouvier. X, 142.
Bouvret. XI, 265.
Bozzo. I, 167.
Brae. II, 159.
Brahe (Tycho). III, 358.
Braschmann. III, 11, 12.
Brasseur. VI, 38, 39.
Brassinne. V, 101, 102.
Braun (C.). X, 265.
Braun (W.). X, 203.
Bredikhine. III, 13; V, 300; VI, 318.
Breen, I, 89, 389.
Breevilt. IV, 210.
Brehmer. X, 290.
Bremiker. I, 71, 230, 264.
Bresina. X, 300.
Bresse. III, 216; X, 144.
Breton (de Champ). I, 214; IX, 124; X, 144; XI, 156.
Breton (Ph.). V, 204, 205, 206.
Bretschneider. I, 100, 104; II, 159; III, 85, 87, 295; IV, 113.
Brett. V, 114; IX, 25; X, 39; XI, 213.
Brewster. I, 71, 160.
Briffaut. II, 276.
Brill. I, 129, 132, 372; II, 237, 366; III, 46, 342, 343; VIII, 7, 84, 85, 116, 117, 209, 212, 216; IX, 277; X, 201, XI, 272.
Brioschi. I, 66, 188, 239, 311, 313; II, 237; III, 109, 130, 332; VIII, 40, 76, 168; X, 143.
Briot. I, 85, 166; IV, 292; V, 319; VI, 65, 272; VII, 193.
Brisse. II, 37, 76; IV, 112; VIII, 21; IX, 125; X, 73, 112.
Brocard. III, 289; VI, 182, 183; VII, 171; X, 145.
Broch. VIII, 163.
Brockmann. III, 53; VII, 93; X, 290.
Broda. VIII, 177; XI, 216.
Broman. III, 220.
Bronwin. X, 142, 143.
Brothers. I, 163; V, 113; XI, 256, 258.
Broun. V, 60; VII, 81.
Brown. X, 37, 44.
Browning. II, 151, 153; III, 246; V, 105, 108, 114; VI, 306; VII, 65.
Bruhns. I, 167, 171, 230, 389; II, 232, 233, 235, 321; V, 179, 182, 183; VI, 167, 169, 174, 177; VIII, 132; IX, 29, 35; X, 272, 278.
Brümmer. II, 96.
Brünnow. I, 389; II, 169; V, 240.
Bruno. V, 270, 272, 276; VII, 142.
Bruns. XI, 48.
Brusotti. VI, 32.
Buchbinder, III, 50.
Buchmann. X, 146.
Buchwald. V, 277.
Budde. VIII, 189.
Buffham. VI, 313.
Bunte. IX, 191.
Burat. X, 303.
Bureau des Longitudes. IV, 110, 112.
Bürgi. XI, 26.
Burmester. I, 61; III, 294; VI, 248; VIII, 187, 190, 191.
Burnham. VII, 60, 63, 69; IX, 13, 14, 25; X, 42; XI, 201, 211.
Burton. VII, 65, 185; IX, 14, 15; X, 43; XI, 201.
Bustelli. I, 153; X, 280.

Butz. II, 159.
Buys-Ballot. VIII, 183.
Byrne. XI, 24.
Cagnassi. V, 18.
Cahen. IX, 173.
Cahours. VI, 319; VII, 239; VIII, 256.
Caldarera. III, 172; VIII, 37.
Caligny (de). I, 97, 98; IV, 80, 82, 128; V, 121, 123, 124, 133, 134; VI, 76.
Callon. X, 112.
Calza, I, 72.
Calzolari. I, 153, 154, 220.
Cambier. VIII, 218.
Campanella. II, 96.
Campbell. X, 47.
Campoux (de). II, 77.
Cantoni (G.). VI, 29; VIII, 233.
Cantor (G.). I, 60; III, 143, 244, 333; VII, 230; VIII, 81.
Cantor (M.). IV, 290; VI, 252; IX, 288; X, 161.
Capello. IX, 23; XI, 197.
Caporali. VI, 111.
Caqué. X, 143.
Càrdenas (de). VIII, 36.
Carini. VI, 255.
Carlier. XI, 246.
Carnot (S.). VI, 201.
Carnoy. II, 79.
Caron. VI, 187.
Carpenter. VII, 77, 81.
Carr. XI, 26.
Carrington. VI, 305, 310; XI, 203.
Carvallo. IX, 161.
Caselli. II, 159.
Casey. I, 308, 311, 315; VI, 232; VII, 78.
Casorati. I, 16, 188, 370; IV, 65; X, 141.
Caspari. VI, 248.
Caspary. XI, 43.
Cassani. I, 154, 332, 334; II, 145, 146; III, 290; IV, 254; V, 263; VII, 92.
Cassini (IV). II, 208.
Catalan. I, 167, 197, 282, 341; II, 19, 20, 78, 290, 295, 297; III, 96, 112, 289; IV, 244; V, 15, 16; VI, 77, 188; VII, 154, 158, 197; VIII, 26, 31, 217, 220, 222, 223, 262; IX, 225; X, 145, 148; XI, 155.
Cauchy. I, 16, 105, 312; VII, 265; VIII, 43, 148; X, 142, 146.
Caux (Salomon de). VIII, 168.
Cayley. I, 17, 126, 159, 162, 181, 182, 183, 184, 185, 215, 216, 217, 312, 314, 315, 366; II, 79, 150, 152, 153, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 361, 366, 367; III, 10, 156, 157, 158, 214, 244, 246, 303, 305, 339, 343, 345, 346; IV, 46, 48, 49, 73, 74, 75, 96; V, 104, 105, 107, 120, 159, 160, 161, 162, 167, 240; VI, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 228, 231, 236; VII, 25, 26, 27, 29, 74, 75, 79, 83, 161; VIII, 91; IX, 20, 230; X, 54, 146, 195; XI, 7, 11, 45.
Cazin. II, 244.
Cecchi. V, 18.
Celoria. I, 90; X, 251, 252, 253, 254.
Cerruti. II, 144; X, 284.
Cètre. XI, 265.
Cézanne (de). XI, 261.
Chabanel. VIII, 29.
Chadu. X, 36.
Challis. I, 89.
Chambers (Ch.). I, 186; VII, 80, 84.
Chambers (F.). VII, 84.
Chapelas. I, 157, 381, 382; II, 331, 335; III, 115; IV, 76; VII, 201.
Charlon. III, 169.
Chasles. I, 13, 155, 213, 382; II, 7, 208, 209, 213, 241, 242, 243, 276, 333, 336, 338, 340, 341; III, 10, 54, 59, 94, 107, 109, 156, 157, 158, 159, 298, 301; IV, 41, 42, 43, 44, 45, 78; V, 122, 127, 135; VI, 83, 135, 136, 294; VII, 153, 157, 160; VIII, 38, 73, 77, 161, 256; IX, 97, 163, 205; X, 144, 145.
Chelini. I, 219; II, 19, 148; IV, 248, 250; VII, 125, 241; VIII, 32, 35.
Cherbulliez. X, 300.
Cheux. II, 276; III, 119.
Chevilliet. VII, 164; VIII, 26, 28, 169.
Cheyne. II, 160.
Chiò. III, 68; V, 269, 270, 274; VII, 121.
Choron. XI, 265.
Christiansen. VII, 32, 86.
Christie. VII, 66; IX, 14, 18, 27; X, 55; XI, 202, 210.
Christoffel. I, 169, 187, 312; III; 45, 46; VI, 237; IX, 276.
Ciotti. III, 148.
Cipoletti. V, 17, 19.
Clarinval. III, 119
Clark. VII, 81.
Clarke. I, 181; V, 159; VII, 85.
Clasen. X, 293.
Clausius. I, 131, 338; II, 65, 142; III, 336; IV, 82, 285; VI, 293; VII, 162; VIII, 21, 120; IX, 187, 279.
Clebsch. I, 124, 126, 129, 132, 136, 230, 312, 389; II, 173, 178, 183, 184, 236, 355, 358, 360; III, 10, 43, 45, 46, 47, 160, 190, 225, 336, 342, 384; IV, 96, 293; V, 240; VI, 110, 112, 253; VIII,

32, 78, 86, 87, 115, 117, 120, 209, 234; IX, 186, 187, 192, 277, 278, 279; X, 113.
Clément. III, 96.
Clifford. III, 345, 346; IV, 45, 47; VII, 27, 85.
Clifton. I, 216; XI, 255.
Clouth. I, 389.
Coatpont (de). XI, 248.
Cockle. II, 271; VI, 206, 212; XI, 255, 258.
Codazzi. I, 313, 314, 315; VI, 237, 244.
Coffin. I, 389.
Coggia. II, 335.
Cohen Stuart. I, 186; III, 348.
Colding. VII, 86, 87.
Collet. II, 263, 264; VI, 42.
Collignon. VIII, 30; XI, 261.
Collins. III, 86; V, 62.
Colnet d'Huart (de). I, 304.
Comberousse (de). IV, 112; VII, 304; XI, 28.
Combes. I, 191, 258, 336.
Combescure. I, 320; III, 117, 216, 296, 297, 306; VI, 243, 245; VII, 156, 161; X, 75; XI, 28.
Compagnon. VI, 181, 182, 183.
Comte. III, 119.
Connal. X, 47.
Conradi. X, 296.
Contamin. VII, 144.
Conti. X, 112.
Copeland. III, 17; X, 47.
Copernic. VI, 24.
Corbin. XI, 253.
Cornu. II, 333, 335, 340; III, 114, 115; V, 124, 136; VI, 199.
Correspondance entre Legendre et Jacobi. VIII, 287; IX, 38, 51, 126; XI, 34.
Cotterill. III, 345, 347; VII, 26.
Coulaine (de). XI, 246.
Coumbary. III, 216.
Courcelles-Seneuil. III, 169.
Cousté. IX, 150.
Covrich. X, 293.
Cramer (G.-H.). I, 359.
Cremona. I, 188, 213, 219, 233, 313; III, 10, 156, 332, 336; IV, 65, 96, 197, 247, 249, 251, 253; V, 10; VI, 244; VII, 37, 107; IX, 186, 192; X, 65, 141, 143.
Crespigny (de). V, 112.
Creuzet de Latouche. XI, 76.
Crevaux. II, 211.
Crocchi. IV, 254, 255; VIII, 37; X, 282.
Crofton. I, 183, 366; III, 345, 346; IV, 45.
Crosnier. VIII, 25.
Čubr. VIII, 112, 124, 127, 128, 129; XI, 80.
Culmann. IV, 50; V, 203; VII, 37.
Curie. II, 212; VI, 57, 87; X, 255; XI, 252, 254, 255.
Curioni. V, 274.
Curtze. I, 313; III, 85, 285, 321; IV, 244, 245, 283; VI, 57; VII, 112; VIII, 180, 185, 186, 188, 227; IX, 281; XI, 215.
Dahl. VIII, 139.
Dahlander. I, 245, 247; VI, 35, 36.
Dambrun. XI, 249, 250.
Darboux. I, 27, 155, 339, 348, 383; II, 23, 40, 155, 184, 221, 266, 301, 314, 337; III, 122, 158, 221, 251, 281, 307; IV, 64, 158; V, 52, 64, 65, 121, 122; VI, 136, 199; VII, 91, 158, 159, 161, 163; VIII, 17, 22, 56, 75, 77, 92, 249; IX, 281; X, 56, 76.
Darget. I, 72.
D'Arrest. V, 183; VI, 166, 168, 176; X, 270.
Daru. X, 142.
Da Schio. I, 389.
Dase. I, 389.
Dauber. X, 290.
Daug. I, 177, 178, 245; III, 219, 220; X, 170.
Davidof. III, 12, 13, 16, 79, 81.
Davidson. II, 224.
Davis. X, 43; XI, 197.
Day. IV, 42.
Deas. II, 203.
Decharme. I, 157.
Decomble. XI, 261.
De Coninck. VIII, 31; X, 112.
Dedekind. XI, 278.
De Gelder. IV, 210.
Deike. I, 280.
De Jong. V, 281; VIII, 184.
Delabar. I, 359; III, 87.
Delacroix. XI, 255.
Delaistre. V, 319.
Delambre. XI, 250, 252.
De la Rue. (A.-M.). III, 81; IX, 47.
Delaunay. I, 30, 167, 212, 256, 262, 339, 379; II, 208, 210, 242, 339, 340; III, 16, 109, 111, 148, 317, 319; VI, 128.
Delègue. VI, 188.
Delort. XI, 255.
Dembowski. I, 280, 281, 364; VI, 177; IX, 29.
De Montel. VII, 106, 109.
Deniéport. XI, 246.
Denison. VI, 310.
Denning. VI, 314; IX, 20; X, 276; XI, 206, 212.

Denza. I, 230, 389; II, 96, 335; III, 216; V, 17, 18, 269, 272; VII, 137.
Denzler. VII, 35.
De Paolis. X, 283.
Deprez. II, 337, 338.
Derrien. VII, 239.
Dersch. VIII, 215.
Desboves. IV, 320; X, 34, 35.
Despeyrous. I, 230; V, 100, 101, 102; X, 146.
Desprez (M). II, 337, 338; V, 134.
De Tilly, II, 294; IV, 57; VIII, 219; X, 146.
Devèze. XI, 248.
Devin. XI, 123.
Dewar. V, 167.
Dewulf. V, 206; VI, 183; VII, 37, 142,; X 65, 282.
Diamilla-Müller. V, 272,
Dickstein. VII, 96; VIII, 180; XI, 217.
Didion. III, 110; VI, 76.
Didon. I, 27, 29, 95, 156; II, 265, 266; VI, 201, 202.
Dieckmann. III, 340; VII, 96.
Dienger. III, 170; VI, 105, 107.
Dietzel. I, 389.
Dieu. VI, 130, 186.
Dillner. I, 177, 178, 179, 243, 249, 295, 296; III, 219, 220; X, 170.
Dini. I, 313, 314, 375, 383; III, 377, 378; IV, 224; VI, 240, 241, 246.
Diorio. VIII, 272.
Dislere. V, 320.
Dittmar. X, 245, 296.
Dittrich. X, 293.
Ditscheiner. VII, 138, 139, 211, 221.
Doberck. IX, 36; X, 89, 91, 93, 278.
Dobrowolsky. VI, 40.
Doergens. I, 72.
Doliński. VI, 157.
Döllen. X, 44.
Dölp. VI, 112; VII, 192.
Domalíp. VI, 103, 107; VII, 219; VIII, 224.
Donati. I, 72; III, 301; V, 17, 18, 175, 178.
Donders. V, 282; VII, 128.
Donnini. V, 18, 19, 20.
Donovan. I, 308.
Dormoy. VI, 319.
Dorn. VIII, 215.
Dorna. V, 267, 268, 269, 273, 276.
Dostor. I, 249, 280; II, 82; III, 82, 374; IV, 279; VI, 184, 188; VII, 117; VIII, 31, 177, 179, 180; XI, 215, 216, 217, 219, 220.
Doutrelaine. V, 121.
Dove. X, 285, 286, 287, 289.
Downing. I, 306.
Dozy. VIII, 190.
Drach (v.). II, 176; VIII, 85.
Drew. I, 39.
Dreyer. X, 271, XI, 211.
Drobisch. V, 201.
Dronke. I, 359, 389.
Dubois. III, 112, 118; VI, 46, 124, 159.
Du Bois-Reymond (E.). I, 187; IV, 202; X, 288, 290.
Du Bois-Reymond (P.). III, 333, 339, 371; V, 287; VI, 242; VIII, 85, 211, 216; IX, 177, 178, 183; X, 195; XI, 274.
Duchêne. XI, 78, 79.
Ducrocq. III, 119.
Duda. I, 39; III, 53.
Dufek. VI, 98.
Duhamel. I, 343; III, 130, 314; IV, 79; VI, 127; X, 144; XI, 241.
Duhil de Benazé. VI, 46.
Dühring. IX, 98.
Dumas. VII, 163.
Du Moncel. VI, 320; VIII, 256; X, 255.
Dumoulin. VI, 272.
Dunér. II, 234; V, 181, 183; VI, 36.
Dunham. I, 389.
Dunkin. VI, 314; VII, 56; X, 45, 86, 91; XI, 204, 211.
Duprez. II, 298.
Dupuis. X, 293.
Dupuy (L.). VI, 319.
Dupuy de Lôme. I, 381, 382; III, 114; VI, 42, 77.
Durand. X, 145.
Durand-Claye. XI, 262.
Durège. I, 49, 61, 135; III, 7, 171; IV, 90, 291; V, 286; VI, 64, 105, 225, 320; VIII, 80.
Dürr. I, 167.
Durrande. I, 213; II, 80, 337; III, 300; IV, 85; VI, 187, 203, 320; VII, 154, 159, 162; VIII, 169, 304; X, 74; XI, 86.
Durret. XI, 26.
Dvořák. VII, 219; VIII, 226.
Dyer. XI, 259.
Eberhardt. I, 230.
Eccher (de). V, 18, 20.
Eckardt. I, 279; VI, 247, 250; VIII, 79, 188, 216; IX, 280.
Eckhardt. II, 160; III, 160.
Eckl. X, 300.
Edlund. I, 245, 246; VI, 35, 37.
Egger. II, 332.
Eggers. VII, 118.

Eichler. X, 300.
Eisenlohr. III, 143.
Elger. VI, 310; VII, 62.
Ellery, I, 230; IX, 154; XI, 201.
Ellinger. X, 290.
Elliot. III, 154.
Ellis. III, 290; IV, 41; VII, 85.
Emsmann. III, 83, 190, 197; X, 300.
Endemann. X, 293.
Endrès. V, 192; VII, 239.
Engelmann. I, 364; III, 224; VI, 172; IX, 233, 234, 235; X, 277.
Enneper. I, 60, 62, 238, 239, 276, 278; II, 139, 141, 240; III, 45, 46, 47, 293; VI, 247, 251, 252; VIII, 84, 119, 186, 214; IX, 186, 187, 240, 277, 278, 279, 288; XI, 273, 274, 275, 276, 277.
Erdmann. II, 76.
Ericsson. III, 24; VI, 34, 35.
Erlecke. IV, 38.
Erler. VII, 95; VIII, 228.
Ermakof. II, 250; V, 294; VIII, 91.
Erman. I, 89, 90; X, 266.
Ermanska. III, 289.
Ersch. XI, 16.
Escary. XI, 122.
Escherich (v.). XI, 111, 216.
Estocquois (d'). III, 301; VII, 144.
Étienne. XI, 26.
Eugenio. II, 144; III, 173.
Euler. III, 130.
Evans. VI, 236; VI, 81.
Everett. I, 181.
Exner. I, 209, 248; IV, 290; VII, 208, 209; VIII, 225; X, 291.
Faà de Bruno. V, 123; IX, 240; X, 166; XI, 44.
Fabré. XI, 246.
Fabri. X, 144.
Fahle. III, 51, 53.
Fais. VIII, 34, 36; X, 279, 284.
Falb. I, 88.
Falisse. III, 96.
Falk. I, 296; II, 224; III, 220, 221; X, 171, 172, 173, 204, 257.
Fasbender. I, 249; III, 85, 86; X, 293.
Fasel. VI, 306, 308; IX, 26.
Faure. V, 205, 206; VI, 182, 184; X, 35; XI, 125.
Favaro. VIII, 32, 265; IX, 95; X, 283.
Faye. I, 154, 212, 257, 344, 379, 381, 383; II, 340; III, 55, 56, 57, 111, 112, 217, 297, 317; IV, 77, 80, 84, 129, 130; V, 120, 124, 125, 128, 134, 135, 137; VI, 43, 79, 80, 81, 82, 121, 124, 128, 285, 295; VII, 154, 157, 162, 198, 199, 201; VIII, 38, 39, 40, 78, 167, 169, 170; IX, 149, 152, 154, 155, 159, 218; X, 112.
Féaux. X, 296.
Fehrs. X, 293.
Feldner. X, 296.
Fergola. IV, 198; V, 15; X, 144.
Ferguson. I, 167.
Fermat. III, 289.
Ferrari. VIII, 146.
Ferrers. I, 365; VI, 206.
Ferrini. V, 19.
Ferron. VIII, 221; X, 293.
Ferry. IV, 56.
Fialkowski. X, 291.
Fiedler. IV, 52; VIII, 65, 113; IX, 192.
Finance. VI, 320; X, 160.
Finger. VIII, 190, 224; X, 291, 296.
Fiore. IV, 199.
Fischer (A.). VII, 219.
Fischer (F.-W.). VII, 117.
Fitremann. IV, 41.
Fizeau. I, 261.
Flamant. XI, 262, 264.
Flammarion. I, 157, 213, 383; II, 209; VI, 78, 125, 159, 292, 296; VII, 155, 156, 239; VIII, 42, 76, 167; IX, 162, 163; X, 160.
Fleuriais. VIII, 74, 164; IX, 152, 227.
Floquet. IX, 174.
Flye Sainte-Marie. III, 131; IV, 292; VII, 166.
Foerster. I, 230; II, 128; III, 198.
Folie. I, 282, 359; VI, 38, 39.
Folkierski. VI, 156, 158; VII, 11.
Follie. III, 119.
Fontaine. III, 130.
Fontené. X, 35.
Fonvielle (de). I, 378; II, 209, 335, 339; III, 59, 109, 110, 111; V, 121; IX, 152, 154.
Forbes. VII, 61.
Forcke. X, 296.
Forster. I, 307.
Forti. I, 265, 359; III, 290.
Foscolo. V, 272.
Foucart. III, 118.
Fouret. III, 289; VI, 290, 298; VII, 162, 164, 168, 173, 200, 202; VIII, 75, 162, 168, 304; IX, 150.
Fournier. IV, 72.
Frahm. VI, 250; VIII, 215, 216; X, 176.
Franchini. X, 142.
Françoise. II, 76; III, 289.
Franke. X, 297.
Franke (H.). X, 293, 297, 300.
Franke (J.-N.). VI, 151.

Frankenbach, X, 293.
Frankland. VII, 73.
Franz. VII, 114.
Franzky. X, 293.
Frattini. IV, 254; X, 281.
Frauenholz. I, 168.
Freeman. V, 106; VI, 300.
Frenet. V, 62, 63; VI, 70.
Fresenius. III, 50, 53; VII, 93, 96; VIII, 227.
Freuchen. I, 370.
Friedlein. II, 147; III, 53, 290, 293; IV, 244, 246, 293; VII, 125; X, 294, 297.
Friis. II, 128; III, 358.
Frisch. XI, 49.
Frischauf. II, 224; III, 191, 291; VII, 105.
Frisiani. X, 146.
Fritsch. VII, 240; XI, 249, 252, 254, 263.
Fritsch. IX, 235.
Fritsch (H.). X, 301.
Fritsche. IV, 60; X, 297.
Fritz. VII, 78.
Frobenius. III, 238, 288, 370; VI, 189, 191; VII, 230, 255; IX, 182; XI, 33, 35,
Froger. IV, 211.
Frölich. III, 291.
Frombeck. VII, 214, 216.
Fromme. XI, 275, 277.
Fron. III, 115.
Frosch. IV, 292; X, 297.
Frost (A.). II, 269.
Frost (P.). II, 269, 271; IV, 177; VI, 209.
Fry. X, 291.
Fuchs. I, 25, 26; III, 145, 244; IV, 233; V, 292; VI, 188, 189, 238; VII, 232, 260; XI, 41, 277.
Funcke. III, 224.
Fuortes. II, 144, 145; III, 86, 172; IV, 198; VIII, 34.
Fürstenau. X, 301.
Gadolin, VI, 108.
Gageot. XI, 246.
Gall (v.). X, 301.
Galle. VI, 170, 173; IX, 150; X, 38, 262, 272.
Gallien. X, 301.
Gambardella. III, 172; VI, 110.
Gambey. X, 33; XI, 123.
Gandtner. III, 160; V, 171.
Gantner. X, 291.
Garbett. VII, 67.
Garbich. I, 390.
Garbieri. VII, 144.
Gardiner. III, 346.
Gariel. XI, 263.
Gasparis (de). II, 231; III, 59; IV, 76; V, 106, 178, 184.
Gasser. I, 168.
Gatien-Arnoult. V, 102.
Gaudin. IV, 271.
Gaumet. IX, 162.
Gauss (C.-F.). III, 160; VI, 112, 159.
Gauss (F.-G.). I, 390; II, 224, 256; III, 234; V, 261.
Gaussin. VI, 79.
Gautier. III, 119.
Gay. III, 119.
Gay-Lussac. VI, 160.
Gebhardt. X, 297.
Geelmuyden. II, 233.
Gegenbauer. VII, 116, 117, 215, 216, 217, 218, 221; VIII, 224; X, 294, 297.
Geijer (v.). X, 171.
Geisenheimer. IV, 289; VI, 247, 250; X, 294.
Geiser. I, 39, 127, 313; II, 367; III, 147; VI, 237; VII, 192; VIII, 191.
Gellenthin. X, 291.
Gemma Frisius. VIII, 180.
General-Bericht über die mittel-europäische Gradmessung. II, 256; IX, 241.
Genet. XI, 246.
Genocchi. I, 315; II, 147; III, 289, 306; IV, 246; V, 269, 274; VI, 255, 288, 292; VII, 121, 125; VIII, 75, 76; X, 145.
Gent. IV, 291.
Gentzen. X, 297.
Gerhardt. IV, 201.
Gericke. V, 179; VI, 170.
Gerlach. I, 168; X, 294.
Germann. X, 294.
Gerono. II, 80, 81; III, 290; VI, 183.
Gerts. X, 271.
Gessner. X, 291.
Geyser. X, 294.
Gherardi. I, 72; III, 85, 191, 295; IV, 293; V, 17, 320.
Gibbs. I, 293.
Gibson. VI, 232.
Gilbert. I, 198, 282; II, 80; IV, 33, 320; VI, 182; X, 144.
Gill. VI, 301; IX, 12, 19; XI, 196.
Gilles. VI, 248, 251, 252.
Gilliss. IX, 231.
Giorgi. II, 149.
Giorgini. X, 144.
Girdlestone. I, 168.
Giulio. V, 267.
Glaenzer. X, 301.
Glaisher (J.-W.-L.). I, 368; II, 274; V,

110, 111, 112, 162; VI, 205, 206, 208, 211; VII, 25, 26, 27, 28, 59, 63, 75, 78; VIII, 76, 221; IX, 20, 26; XI, 7, 20.
Glan. X, 288.
Glasenapp. IV, 60; V, 176, 182; VI, 33; VII, 190; VIII, 143.
Glaser. X, 294, 301.
Gledhill. IX, 25; X, 46; XI, 199.
Gloesener. VI, 272.
Glotin. V, 60, 61.
Gobbi-Belcredi. V, 273.
Gödecker. X, 294.
Godt. III, 336.
Goldberg. I, 72.
Goldstein. X, 288.
Gompertz. II, 282.
Göransson. VIII, 132.
Gordan. I, 26, 126, 127, 132, 312, 314, 316; II, 180, 363, 368; III, 46, 334; VIII, 81, 84, 91, 115, 120, 209, 214.
Göring. VIII, 212.
Gosiewski. VI, 149, 151, 154, 157, 159.
Gossart. XI, 26.
Götting. II, 362; X, 291.
Gould. I, 281.
Goulier. X, 255; XI, 246, 248, 254, 255.
Govi. II, 147; IV, 81; V, 267, 268, 269, 270, 272, 273.
Grad. III, 305.
Graeff. V, 137; VI, 123.
Graffweg. II, 140.
Graindorge. II, 199; III, 96; IV, 44; VI, 38, 39, 130, 134.
Gram. VII, 30; VIII, 139, 140, 211.
Grandi. I, 154; II, 128.
Grant. II, 231; V, 104; VI, 306; IX, 271.
Grashof. III, 191.
Grasset. XI, 247.
Grassmann (H.). I, 249; III, 10, 143; VIII, 216; IX, 279.
Grassmann (R.). V, 320.
Gravelaar. XI, 219.
Graves. I, 310, 311.
Green. I, 390.
Greg. V, 118.
Greiner. XI, 216.
Grelle. I, 62; II, 140; III, 293; V, 262; X, 143.
Grellois. III, 119.
Gretschel. I, 248.
Griffiths. III, 290; IV, 49; VI, 205.
Grillon. VII, 240; XI, 250, 253.
Grimes. III, 154.
Grinwis. VII, 128, 129, 130; VIII, 183.
Grosso (del). I, 153, 224, 332.
Grubb. I, 185; III, 246; IX, 231.
Grube. I, 61; II, 141; VIII, 190.
Gruey. II, 266; VII, 201; VIII, 76.
Gruhl. X, 294.
Grunert. I, 100, 101, 279; III, 83, 86, 87, 88, 285, 374, 376, 377; IV, 279, 280, 281; VII, 112.
Grünwald. I, 63.
Grützmacher. VI, 167.
Gualterotti. VIII, 265.
Guarnieri. I, 168.
Guéroult. III, 302.
Gueysse. XI, 161.
Guillemin. I, 382; II, 256, 338.
Guillemot. XI, 250.
Guiraudet. III, 195.
Guldberg (A.-S.). I, 283, 359; II, 96; IV, 35; VI, 258.
Guldberg (C.-M.). I, 285; VI, 257.
Gundelfinger. I, 231; II, 361; III, 242, 262, 333, 334, 344; VI, 244, 249, 252; VIII, 87, 115, 185, 214; IX, 280; X, 179; XI, 30.
Gunning. V, 281.
Günther. III, 194; IV, 293; VII, 115, 116, 118, 124; VIII, 172, 173, 179, 211, 262, 267; IX, 239; X, 131; XI, 108, 215, 216.
Güssfeldt. II, 174.
Guthrie. I, 365; II, 256; VII, 76, 84.
Guyot. II, 335; III, 112, 118.
Gyldén. I, 241; II, 321, 325; III, 97, 101, 103; IV, 59; VI, 108; VIII, 168, 169; IX, 150, 227; X, 55, 171.
Haase. II, 239.
Habich. I, 315; XI, 270.
Hachette. I, 382.
Hahnemann. X, 294.
Haidinger (v.). VII, 138.
Hain. IV, 281, 283; VII, 117, 118; VIII, 177; XI, 215, 216, 217, 218, 220.
Hall (Asaph.). I, 280; II, 234; V, 177; VI, 173; VII, 63; IX, 30; X, 264, 265.
Hall (Maxwell). V, 110; IX, 24.
Haller v. Hallerstein. I, 168.
Hallstén. VI, 108, 109.
Halphen. I, 65; III, 108, 110; V, 127, 138; VII, 155, 163, 164, 168, 169, 171, 172; VIII, 75, 76, 166.
Hamberg. X, 174.
Hamburger. III, 294; V, 288; XI, 45.
Hamerle. X, 297.
Hamilton (sir W.-R.). I, 309, 310.
Handl. I, 209; VII, 216, 217.
Hankel (H.). I, 60, 62, 117, 135; VI, 254; VII, 192; VIII, 216; IX, 288; X, 197, 198, 209; XI, 81.

Hankel (W.). V, 265.
Hanlon. IV, 45.
Hann. VII, 140, 214.
Hansemann. III, 191, 295.
Hansen (Chr.). I, 179, 180; VII, 87.
Hansen (P.-A.). I, 168; III, 18; V, 195, 197, 199, 200, 264, 265, 266.
Hansen (P.-C.-V.). I, 180, 369, 370; V, 278; VIII, 140.
Happach. X, 297.
Harbordt. I, 129.
Hargreave. X, 143.
Harkema. VIII, 31; X, 145.
Harley. I, 163; III, 345.
Harms. X, 294.
Harnischmacher. X, 291.
Hart. III, 10.
Harting. VII, 129.
Hartmann. X, 291, 294.
Hartnup. X, 52.
Haton de la Goupillière. I, 270; III, 108, 130; IX, 218; XI, 122.
Hatt. VI, 296.
Hattendorff. II, 225; III, 160; IX, 187; XI, 97, 275.
Haub. X, 301.
Haughton. I, 306, 308, 309; VII, 73, 80.
Hayden. VII, 81.
Hayward. VII, 28.
Hechel. II, 256.
Heelis. I, 163.
Heger. I, 277; II, 139, 141; III, 257, 290; IV, 285; VI, 249; VIII, 186, 187.
Heilbronner. XI, 15.
Heilermann. X, 297.
Heine. II, 177; III, 141, 264, 344, 373; VI, 192; IX, 176, 187; X, 286.
Heinze. X, 301.
Heinzerling. III, 256.
Heis. I, 33, 364; IV, 129; V, 123; VII, 200; X, 272.
Hejzlar. VIII, 126, 129; XI, 80.
Helke. X, 294.
Heller. X, 297.
Hellmann. III, 153; VIII, 228.
Hellwig. X, 297; XI, 218.
Helmert. I, 60.
Helmes. I, 168.
Helmholtz. I, 238; III, 142, 256; IV, 88, 201, 203; V, 62; VI, 40; VII, 132, 133, 135, 256; X, 289.
Hemming. IV, 186; V, 203.
Henke. X, 294.
Henneberg. IX, 148.
Hennebert. XI, 255.
Hennessy. I, 308; II, 210; VII, 76, 77.
Hennig. X, 145.
Henrich. I, 168; III, 256.
Henrici. III, 346, 347.
Henry (F.). XI, 262.
Henry (J.). VI, 45.
Henry (Paul). III, 112; IV, 85, 130; VI, 45, 81, 177; VIII, 76; X, 272, 276; XI, 211.
Henry (Pr.). III, 112; IV, 85, 130; VI, 45; X, 269, 272, 276.
Hentschel. IV, 284; X, 301.
Heppel. VII, 74, 77.
Héraud. III, 300; VIII, 74, 76.
Hermann. I, 199.
Hermann (A.). II, 78; IV, 41; VIII, 304.
Hermes. III, 243.
Hermite. I, 313, 314, 320, 373; II, 21; IV, 61; V, 49; VI, 77, 78, 178, 181, 195, 196, 198; VII, 27, 29, 124, 239, 259; VIII, 218, 220; IX, 177, 185; XI, 41, 44.
Herpin. X, 139.
Herr. VII, 51.
Herrmann. III, 131; VII, 215.
Herschel (A.-S.). V, 104, 119; VI 306; VII, 66.
Herschel (Cap. J.). VII, 73; IX, 26.
Herschel (J.-F.-W.). II, 150; III, 248, 250, 251.
Herschel (sir John-F.-W.). I, 72; V, 104, 159.
Hertz. III, 76, 81; XI, 219.
Hertzer. XI, 27.
Hervert. VI, 92, 98, 100; VII, 263; VIII, 126.
Hess. II, 140; IV, 283.
Hesse. I, 33, 39, 196, 303, 390; III, 10, 245, 262; IV, 87, 254; VI, 214; VII, 91, 192; VIII, 185; IX, 185.
Hessel. I, 359.
Heyden (v. der). V, 169.
Heym. X, 297.
Hickethier. X, 301.
Hierholzer. II, 239; III, 335.
Hilaire. VI, 179.
Hildebrand. X, 291.
Hildebrandsson. I, 177; X, 173.
Hill. III, 24; VI, 160; VIII, 130, 133.
Himstedt. XI, 277.
Hind (J.-R.). I, 390; V, 179, 181, 182; VI, 45, 169, 305, 308, 309; VII, 57, 59; IX, 14; X, 44, 267, 269; XI, 210, 258.
Hinse. IV, 204.
Hinstin. XI, 255.
Hippauf. IV, 207, 224.

Hirn. IV, 112, 193; V, 137; IX, 159, 288; X, 160, 304.
Hirsch. XI, 263, 266.
Hirst. II, 146; III, 346, 347.
Hochheim. I, 276; II, 140; III, 83, 85, 88, 375; VII, 113, 116; X, 297; XI, 216, 219, 220.
Hoefer. VII, 192; X, 136, 258.
Hoek. I, 88, 187; III, 348; VIII, 183.
Hoessrich. X, 301.
Hoffmann (A.). II, 256; III, 295.
Hoffmann (J.-C.-V.). III, 48, 50, 52, 53; IV, 205; V, 169, 170; VII, 93, 94, 95, 96; VIII, 227, 228.
Hoffmann (L.). I, 137.
Hofmann. I, 359; X, 294.
Höhr. VIII, 227.
Holden. X, 39, 54; XI, 200.
Holetschek. VI, 174; VIII, 223; X, 274.
Hollis. V, 106.
Hollweck. X, 291.
Holmberg. VII, 87.
Holmgren (Hj.). I, 243, 244; VI, 36.
Holmgren (K.). I, 246; VI, 37.
Holst. X, 170.
Holten. I, 285.
Holzmüller. I, 276; II, 320; III, 293; VI, 248; IX, 238; X, 297.
Honsig. X, 294.
Hoorweg. VIII, 183.
Hoppe (C.). X, 301.
Hoppe (R.). I, 62, 248, 339; II, 238; III, 131, 242, 332; IV, 205, 286; VI, 205, 242; VII, 113, 114, 116, 118, 119; VIII, 170, 173, 177, 181; XI, 215, 216, 217, 219, 220, 221.
Horner. II, 269, 271, 273; VI, 211.
Hornstein. II, 233, 320; III, 294; VII, 208, 212, 218, 222; IX, 234.
Horvath. I, 60; VII, 170.
Hoschek. II, 96.
Hossenfelder. III, 335; X, 291.
Hoüel. I, 66, 223, 324, 339, 384; II, 76, 80, 257; III, 160, 212; IV, 43, 280; V, 61, 62, 63, 64, 170; VII, 7, 145; VIII, 9; X, 279; XI, 27, 84.
Hough. III, 154; V, 106, 186.
Housel. III, 289; VI, 159.
Houzeau. IV, 56.
Howlett. X, 206.
Hoza. III, 373, 376, 377; IV, 279; VI, 92, 100; VII, 118, 119; XI, 86, 219.
Hrabák. VII, 49.
Hromádko. XI, 81, 82, 85, 86.
Hüdel. X, 297.
Huggins. I, 184; V, 119, 185; VII, 79, 80; IX, 14.
Hugo. V, 124; VII, 166.
Huguenin. IV, 210.
Hultman. I, 177, 178, 295, 296; III, 219, 220; X, 170, 171, 172, 173.
Hunger. X, 301.
Hunt. V, 107.
Hunter. X, 44.
Hunyady (de). VI, 179.
Hüssener. X, 249, 301.
Hutt. X, 245, 294, 297, 301.
Huygens. III, 131.
Ianichefsky. I, 99.
Iarochenko. III, 211.
Igel. IV, 289, 292; VIII, 122.
Imschenetsky. I, 72, 101, 164; II, 144; IV, 280; VI, 22; VII, 238; XI, 162.
Inskip. I, 359.
Iourief. III, 12, 78.
Irmer. II, 320.
Isè. I, 219; IV, 254; VII, 91.
Issalène. V, 320.
Jacobi (C.-G.-J.). I, 27, 390; III, 243; V, 145; VI, 189; VIII, 2[illegible], 291; IX, 38, 51, 67, 74, 82, 89, 12[illegible], 132, 133, 138; XI, 34.
Jacobi (M. v.). VI, 32, 33.
Jacoli. I, 99; IV, 246; VIII, 265.
Jadanza. I, 152.
Jäderin. IX, 30.
Jago. VII, 84.
Jamin. III, 314; VI, 127; VIII, 304.
Janni. I, 152, 287, 333; III, 172; IV, 254; VI, 110; VII, 91, 92; VIII, 32, 34, 35, 36; X, 145.
Jansen. X, 294.
Janssen. X. 294.
Janssen (J.). I, 382; II, 209, 211, 335, 338; III, 111; V, 133; VII, 80, 197; VIII, 74, 77, 234; X, 112.
Jarolímek. VI, 101; XI, 82.
Javary. VII, 240; XI, 248, 252.
Jean. VII, 48.
Jeans. I, 199.
Jeffery. II, 269, 271, 273; VI, 207, 212.
Jeffreys. VII, 77.
Jelineck. X, 291.
Jellett. IV, 225.
Jenkin (Fl.). I, 161; V, 167.
Jenkins (M.). III, 346.
Jensen. I, 370.
Jevons. I, 368; VII, 74.
Jičínský. VI, 101.
Joachimsthal. II, 81; III, 166, 243; IV, 36; VI, 178.

Jochmann. I, 63; III, 143; IV, 292.
Joerres. III, 146.
Joffroy. IX, 175.
Johnson (Rev. S.-J.). V, 115; VII, 61; IX, 17; X, 39, 43; XI, 257.
Jonquières (de). I, 132; III, 10, 156, 157, 158.
Jordan (C.). I, 64, 92, 128, 136, 213, 215, 313, 315, 319; II, 161, 211, 279, 338, 339; III, 88, 94, 95, 296, 297, 303, 305; IV, 77, 83, 129, 131, 199; V, 136; VI, 128, 287, 295, 297; VII, 156, 163, 165, 170, 171, 173, 174, 202; VIII, 19, 24, 39, 41, 42, 169; IX, 121, 151, 182, 226; X, 143, 146.
Jordan (W.). I, 89, 90, 364; III, 291, 294; IV, 288; VI, 248; IX, 27; X, 264, 265.
Jost. X, 248, 301.
Jouanne. II, 76.
Jouart. XI, 76, 77, 78, 79.
Jouffret. VII, 239; XI, 75, 76, 77, 78.
Jourdain. XI, 246.
Jourjon. VI, 293.
Joynson. III, 248.
Juel. VII, 33; VIII, 138.
Juling. X, 301.
Jullien (A.). VIII, 304; IX, 176; X, 33.
Jullien (le P.). III, 118, 131.
Jung. I, 153, 154, 333; VII, 107, 109.
Junghann. IV, 291.
Junghans. II, 128; III, 160; V, 171.
Jürgens. XI, 32.
Jurien de la Gravière. VI, 128.
Kachel. X, 295.
Kaestner. XI, 15.
Kaiser. II, 128, 232, 320; III, 348; VI, 174; VII, 128; X, 265.
Kämpf. X, 291.
Kapp. IV, 290.
Kappe. III, 160.
Kärger. XI, 219.
Karliński. XI, 269.
Kayser (E.). I, 88; X, 271.
Keijser. IV, 210.
Kelland. VI, 112, 161.
Keller. VI, 26, 31, 254; VIII, 233, 234.
Kepler. I, 199; XI, 49.
Ketteler. II, 83; X, 285.
Key. V, 108.
Khandrikof. III, 12, 14, 16; V, 300; IX, 36.
Kiechl. I, 211.
Kielldahl. X, 173.
Kiepert. III, 191, 372; IV, 237, 243, 286, 290; V, 284, 285; IX, 184; XI, 48.
Kiessler. X, 295.
Kiessling. III, 50; X, 301.
Kinkelin. I, 135; II, 138; III, 212.
Kirchhoff. I, 188; II, 358; III, 139, 140, 143; VII, 192; IX, 95.
Kirkman. I, 163; XI, 259.
Kirpitchof. VIII, 145.
Klein. XI, 248.
Klein (F.). I, 239, 335, 338; II, 72, 179, 183, 341; III, 330, 338, 339, 344; IV, 203; VIII, 83, 117, 122, 209, 211, 216; IX, 186, 276, 277, 278.
Klein (H.). IX, 98.
Klein (H.-J.). II, 128, 320; X, 268.
Kleitz. III, 115.
Klepert. II, 320.
Klette. II, 320.
Klingenfeld (v.). IV, 292.
Klinkerfues. I, 90, 239, 281, 302, 390; II, 320; III, 45, 47, 48; VI, 312; IX, 237, 277; X, 274; XI, 273, 274.
Klippert. X, 295.
Klügel. I, 137.
Kluger. VI, 157, 158.
Knapp. III, 295.
Knauer. X, 297.
Knipschaar. X, 295.
Knobel. VII, 66; IX, 17, 26; X, 46, 90; XI, 214.
Knorre. XI, 203
Knott. I, 163; V, 179; X, 89; XI, 256, 257, 258.
Kober. III, 51, 52, 53; IV, 207; V, 169; VII, 94, 96; VIII, 227.
Koehler. VI, 179, 180, 181; VII, 165, 168; X, 301.
Koessler. X, 301.
Kohlrausch. III, 288; IX, 186, 279; XI, 273, 275, 276.
Kolbe. VII, 220.
Kommerel. I, 39.
König. II, 320; IV, 38; VII, 208; VIII, 28, 84; IX, 278.
Königsberger. I, 128; II, 353; III, 144; VII, 192; IX, 145; XI, 44, 277.
Konkoly. X, 272.
Kopka. IV, 179.
Koppe. IX, 235.
Korkine. II, 173; IV, 60; VI, 187; VIII, 90, 119.
Korndörfer. I, 136; II, 173, 364, 366; III, 333; X, 301.
Korneck. X, 291, 295, 297.
Korteweg. VI, 112.
Kosch. XI, 218.
Kossak. II, 68; III, 193; X, 245, 295.
Kostka. IV, 200; XI, 47
Köstler, X, 291.

Kötteritzsch. I, 61, 275; II, 138; III, 291; IV, 287; VI, 248, 249; VIII, 188.
Koutny. VII, 212.
Kowalczyk. II, 234; III, 16; X, 272.
Kowalevsky (Sophie v.). XI, 27.
Krähe. X, 249, 301.
Krakow. X, 291.
Kramm. X, 297.
Krause. X, 295.
Krausé (M.). X, 201.
Krejči. VI, 89, 105; VIII, 122, 127, 230.
Kretschmer. I, 390; X, 291.
Kretz. V, 125; VI, 203; VII, 199; VIII, 304; X, 160.
Krey. II, 141; X, 295.
Kröhncke. III, 191.
Krok. VIII, 137.
Kronecker. I, 187; III, 144; IV, 203, 256; VI, 41, 42; VII, 132, 155; X, 285, 286, 287.
Krueger. I, 274; VI, 109.
Krumme. I, 62; II, 139; IV, 205; VII, 96.
Kucharzewski. VI, 156, 157, 158.
Kuchynka. XI, 82.
Kuckuck. III, 52.
Kuczyński. XI, 269.
Kudelka. I, 100; III, 374; IV, 281; VII, 95; VIII, 228.
Kuhn. II, 141.
Külp. III, 88, 374; IV, 279, 280; VIII, 181; XI, 221.
Kummer. IV, 202; VI, 41; X, 287.
Kupoustin. I, 231.
Küpper. VI, 103, 108; IX, 37.
Kurz. I, 62; II, 138.
Küster. XI, 27.
Labrousse. II, 208.
Lacolonge (de). V, 61, 62.
La Caille (de). VI, 253
La Cour. VII, 87.
Lafitte (de). X, 145.
La Gournerie (de). I, 91, 92, 98; II, 33, 37; VI, 81; VIII, 20; X, 144, 145.
Lagrange. I, 378; III, 131; VII, 121, 126; X, 145.
La Gréverie (de). XI, 247.
Laguerre. II, 35, 75, 77, 78, 79, 246, 279; III, 289, 379; VI, 178, 180, 181, 182, 183, 185, 291, 293, 297; VII, 164, 165, 166, 167, 172, 174, 200; VIII, 39, 168; IX, 124, 153; X, 145, 148; XI, 121, 156.
Laisant. II, 79; III, 289; VI, 185; VIII, 26, 30, 31; X, 145.
Lalande (de). XI, 16.
Lalanne. III, 151.
Lamarle. X, 145.
Lambert. III, 96.
Lambert (G.). I, 65.
Lambert, S. J. X, 92.
Lamé. I, 189, 224; VIII, 21.
Lamla. X, 142.
Lamont. I, 231.
Landes. III, 119.
Landriani. X, 284.
Lang (v.). VII, 139, 203, 211, 214, 218; XI, 81.
Langdon. V, 114.
Langer. X, 297.
Langley. IX, 18, 225; X, 270.
La Noë (de). XI, 252.
Lapchine. III, 81.
Laplace. III, 131.
Lapparent (de). XI, 255.
Lappe. III, 142.
La Rive (de). III, 217.
La Roche-Poncié (de). VIII, 256.
Laroque. V, 101, 102.
Lassell. I, 238; III, 251; V, 103, 106; IX, 12; X, 39, 42; XI, 214.
Laterrade. II, 330.
Laudi. VII, 209; X, 291, 298.
Laugier. I, 256; VI, 128.
Laurent. II, 193; V, 320; VI, 18, 130, 187, 199; VII, 239; VIII, 25, 27, 28; IX, 123, 174; X, 33; XI, 160.
Laussedat. I, 33, 348; III, 115, 153; IV, 128, 130; VI, 299; VII, 197; XI, 247.
Lavaux. VIII, 304.
Lavisato. V, 18.
Lavoinne. XI, 262, 263.
Léauté. VII, 198, 201.
Lebedef. III, 81.
Le Besgue. I, 336; II, 81; V, 60, 61; VI, 180, 188; XI, 27.
Le Beurriée, XI, 255.
Lechalas. XI, 260.
Lecky. IX, 15, 19.
Leclert. II, 79.
Lecoq de Boisbaudran. VI, 320.
Le Cordier. VIII, 39.
Ledent. VI, 37.
Ledieu. III, 113; VI, 76, 78, 79, 80, 289, 290, 291, 293; VII, 155, 156, 157, 162, 163; IX, 149, 152, 154, 162.
Lefébure de Fourcy (L.-É.). I, 231.
Lefébure de Fourcy (R.). VIII, 30.
Lefort. X, 304; XI, 262.
Lefranq. III, 96.
Legendre. VIII, 287, 299, 302; IX, 44, 61, 63, 65, 71, 80, 87, 92, 129, 136, 140; XI, 34.

Legge (di). III, 173.
Le Hir. II, 208.
Lehmann. I, 88.
Leiber. X, 298.
Leidenfrost. X, 301.
Leinemann. X, 302.
Leitch. II, 275.
Lejeune-Dirichlet. II, 320; III, 168, 256.
Lemaly. II, 332, 335.
Lemkes. III, 288.
Lemoine (E.). II, 79, 80; III, 290; VII, 165.
Lemonnier. II, 81, 82; IV, 41; VIII, 29, 75, 76; IX, 175; X, 34, 85.
Lemoyne. IV, 198.
Lemström. VI, 35, 37.
Lenthéric. VII, 239.
Lenz. I, 241.
Leonelli. X, 160, 164.
Leonhard. VI, 213.
Leppig. I, 90; VI, 174.
Le Roy (A.). I, 99.
Leroy (C.-F.-A.). I, 231.
Lespiault. I, 72; III, 119; IV, 293; V, 60, 61, 62; VIII, 73.
Le Sueur. VII, 75, 76.
Letnikof. III, 12, 14, 15; VI, 316; VII, 233.
Leveau. II, 209, 334; III, 55; IV, 77, 84; VIII, 256; IX, 162.
Le Verrier. I, 157, 166; II, 335; III, 55, 57, 95, 301; IV, 73, 75, 76, 85; V, 115, 133; VI, 289, 320; VIII, 40, 41, 42, 67; IX, 153, 154, 155, 159, 172, 199, 214, 226, 227; X, 92.
Levret. IV, 130; V, 124, 126.
Levy. I, 271, 338; III, 56, 93, 111; IV, 84; V, 137; VI, 137, 214, 286; VII, 144; VIII, 13, 167.
Lewänen VI, 251.
Lewin. IX, 95.
Lewis. IX, 18.
L...f. III, 16.
Liais. I, 88; III, 112, 113; X, 90.
Lie. I, 335, 338, 382; II, 72; III, 43, 330, 365, 367; IV, 203; VI, 255, 256; VIII, 81; IX, 186, 277, 278, 279; X, 182; XI, 276.
Lieber. I, 199; X, 298.
Lieblein. I, 362; III, 171; VIII, 81.
Liersemann. X, 295, 298.
Ligowski. I, 280; III, 374, 375; VII, 116; VIII, 180; XI, 216, 217, 218.
Liguine. V, 298; VI, 188; VII, 170, 172; VIII, 30; X, 36.
Lindelöf. I, 242, 274, 275; II, 78, 177; IV, 43; VI, 108, 109.
Lindemann (Ed.). VII, 190.
Lindemann (F.). VIII, 209.
Linder. V 62
Lindhagen. VI, 35.
Lindman. I, 101, 178, 242, 243; III, 83, 375; X, 170; XI, 221.
Lindquist. III, 220.
Lindsay (lord). VI, 301; IX, 12, 19; X, 47, 53; XI, 196.
Linsser. I, 240.
Lion. III, 58.
Lionnet. III, 289; VIII, 29.
Lioubimof. III, 13, 81; V, 296; VI, 318.
Liouville (E.). VI, 135.
Liouville (J.). I, 91, 95, 96, 97, 166, 190; II, 34; VI, 135; VIII, 19, 21.
Lipkine. IV, 59.
Lippich. II, 351; VIII, 211.
Lips. X, 292.
Lipschitz. I, 187, 315; III, 46, 140, 142, 263, 349; IV, 97, 142, 212, 297, 308, 314; VI, 40, 212, 241; VII, 248, 256, 259; VIII, 120; X, 149; XI, 45, 47.
Listing. I, 239; IX, 186, 241, 277; XI, 272.
Littrow (v.). I, 210, 249, 365; V, 182, 184; VII, 203, 209, 212, 217, 218.
Liventsof. X, 104.
Liverani. V, 20.
Lloyd. I, 307, 308.
Lobatchefsky. I, 66, 324, 384; V, 61.
Lobatto. III, 347, 348; IV, 210, 211, 212.
Lockyer (N.). I, 186, 199, 337; V, 124; VI, 46; VII, 73, 75, 82, 86.
Lœwy (B.). I, 185, 368; II, 150; VII, 75, 79, 80, 85.
Lœwy (M.). II, 213, 339; III, 148, 297; X, 112.
Loisy. XI, 255.
Lommel. I, 59; II, 137, 240, 366; III, 333; IX, 281.
Loomis. III, 154.
Lorberg. I, 25; III, 143.
Lorenz. I, 131, 180, 369; II, 15, 16; V, 277, 279; VII, 30, 31, 33, 86, 87; VIII, 137, 138, 140.
Lorenzoni. V, 182; VI, 167.
Loschmidt. I, 60, 61, 208, 210; VII, 204, 208.
Lošt'ák. VII, 263.
Lötzsch. II, 351.
Lovering. III, 154.
Löw. X, 47.
Lowe. VI, 306.
Löwe. XI, 307.
Löwenherz. II, 351.

Loyau. X, 160.
Loyre. XI, 253.
Lübeck. VII, 223.
Lubin. VIII, 31.
Lübsen. I, 359.
Lucas (Éd.). II, 76, 79; IX, 175, 213; X, 35, 36; XI, 120, 121, 122, 124.
Lucas (F.). I, 65, 66, 320, 339, 344; II, 34; III, 300; IV, 86, 130; VI, 287, 289, 290, 292; VII, 161, 198; XI, 121.
Lucchesini. VIII, 257.
Lühmann (v.). I, 199; X, 298.
Lukas. XI, 218.
Lundberg. III, 221; X, 170, 172.
Lundström. V, 168.
Lüroth. I, 88, 126; II, 357; III, 335; VIII, 118; X, 179; XI, 274.
Luther. II, 211, 231, 232, 338, 339; IV, 80; V, 179, 184; VI, 174; IX, 12, 29, 35; X, 267, 270, 272, 278.
Lutterbeck. I, 199.
Luvini. II, 352; V, 20, 269.
Lynn. III, 246; VI, 305, 309; VII, 65.
Lyon. XI, 249.
Maas. III, 169.
Mac Berlin. III, 26; VIII, 135.
Mac Dermott. III, 154.
Mac Farlane. VII, 79.
Mach. I, 209; VI, 104; VII, 218, 219, 222; VIII, 225.
Mac Kichan. VII, 84.
Maclaurin. III, 10; X, 249.
Maclear. I, 294.
Mädler. I, 199; II, 159.
Madsen. VII, 88.
Magnac (de). III, 95; IV, 82; VII, 240.
Magnus. X, 144.
Maguire. V, 112.
Maillard. III, 159, 161.
Mailly. IV, 271.
Main. I, 232, 390; V, 114; IX, 26; X, 91.
Mainardi. II, 20, 149; VII, 135, 137; X, 143.
Maire. X, 160.
Malet. V, 287; IX, 181.
Malézieux. XI, 262, 263.
Maleyx. VI, 184, VIII, 30; IX, 174, 175.
Mallet. I, 306.
Malmsten. I, 177, 244; III, 220; X, 143, 174.
Malý. XI, 217.
Manceron. XI, 75, 76.
Mangin. XI, 248, 250, 253.
Mannheim. I, 198, 214, 297, 318, 334, 337; II, 125; III, 55, 92, 115, 118, 119, 150, 216, 217, 382; IV, 128; V, 126, 132; VI, 83, 129, 295, 298; VII, 154, 156, 167, 240; VIII, 42, 162, 164, 167; IX, 122, 214; X, 145; XI, 79.
Mansion. I, 206; V, 313; VI, 180, 253; VII, 123, 124; VIII, 217, 218, 219, 220, 221, 222; IX, 96; X, 143, 147, 148; XI, 218.
Maquieu. II, 332.
Marangoni. V, 19.
Marchand. VI, 124; X, 160.
Marcille. X, 255; XI, 254.
Marcks. VIII, 79.
Marco. IX, 47.
Marey. III, 150; VI, 293.
Marie. III, 305; IV, 72, 75, 76, 77, 79, 81, 82, 84, 86, 128; V, 128, 133, 134, 135, 136; VI, 128, 131, 135, 204; VII, 240; VIII, 168, 169.
Marié-Davy. VI, 124; X, 112, 255.
Marre. VIII, 264.
Marsano. III, 287, 290; X, 143.
Marshall. V, 166.
Marth. I, 281; VI, 299, 313; VII, 67; IX, 13; X, 46, 51; XI, 200.
Martin (Ad.). I, 65.
Martin (G.). XI, 247.
Martin (Th.-H.). II, 147; IV, 245, 246; VI, 252, 253; VIII, 262, 264.
Martin de Brettes. I, 339; III, 111; IV, 130; V, 123.
Martins. III, 118.
Martynowski. VI, 158.
Marx. X, 302.
Mascart. VI, 198.
Masing. VII, 96.
Massieu. I, 344; IV, 81.
Massu. XI, 255.
Mastaing (de). VI, 320.
Mathieu (C.-L.). VIII, 162.
Mathieu (É.). I, 92, 95, 97; II, 33; III, 55; IV, 112, 231; VI, 43, 124, 125, 130, 131, 292; VII, 91, 171; VIII, 21, 40, 165; IX, 125, 153, 159; X, 146; XI, 31.
Matthiessen. I, 39, 63, 276, 314, 364, 373; II, 234; III, 292, 293; VI, 250, 251; VIII, 179, 187, 188; IX, 239.
Matzek. I, 208.
Matzka. III, 170; IV, 278; VI, 106.
Maur. X, 298.
Maurer. X, 298.
Maury (F.). V, 240.
Maxwell. I, 181, 185; II, 200, 203; III, 143, 346; IV, 42, 45, 47, 49, 224; V, 59, 241; VII, 26, 29, 80; IX, 24.
May. X, 292.

Mayer (A.). II, 176, 364; III, 332; VIII, 87, 117, 209; IX, 278, 279; X, 190, 191; XI, 87, 125, 273, 276.
Mayer (A.-M.). I, 231; III, 215, 332.
Mayevski. III, 15; IV, 77.
Mayr. I, 104, 361.
Maywald. I, 281; II, 232.
Mees. IX, 280.
Mehler. I, 231; VIII, 81.
Meissel. II, 240, 367; III, 131; VII, 116; VIII, 180; X, 298, 302; XI, 217.
Meldrum. VI, 313; VII, 84.
Mellberg. II, 137.
Melsens. II, 294, 298.
Menabrea. V, 268; VI, 254, 255, 286; VII, 125.
Mendeléief. VIII, 145.
Mendthal. VII, 116.
Menge. X, 302.
Méray. III, 384; IV, 24; VIII, 78.
Mercadier. II, 333; III, 114; V, 124; VI, 82, 83 286.
Merlin XI, 255.
Merrifield. I, 184; III, 347.
Mertens. III, 373; IV, 237; V, 287; VII, 226, 231, 249; IX, 181, 281; XI, 270.
Messmer. X, 292.
Metzer IX, 30.
Meunier (St.). II, 209.
Meusnier. I, 382.
Meutzner. VII, 119; X, 191.
Meyer. X, 292.
Meyer (F.). VIII, 226.
Meyer (G.-F.). II, 96, 228, 357; VIII, 118.
Meyer (O.-E.). III, 239; IV, 242; VII, 254; XI, 35.
Meyerstein. I, 390.
Meynert. I, 199.
Michaelis. VIII, 182.
Michal. XI, 260.
Michez. II, 248, 251; IX, 35.
Middendorf (v.). VI, 33; VII, 190.
Mikšić. XI, 82.
Mildenberger. II, 128.
Milewski. XI, 124.
Milinowski. VI, 249; VII, 230, 255; VIII, 186, 187, 188; IX, 180, 238; X, 295.
Militzer. I, 210.
Miller. I, 237.
Milliet-Dechales. XI, 16.
Milner. X, 295.
Minchin. VI, 208.
Minding. I, 240, 241; IV, 60.
Minich. X, 142, 144.
Minine. X, 105.
Minnigerode. III, 47, 342; IX, 277; XI, 273, 274.
Mischer. IX, 281.
Mischpeter. X, 302.
Mister. VI, 184.
Mittag-Leffler. I, 179; XI, 276.
Mittelacher. III, 86; VI, 247.
Moberg. VI, 108.
Möbius. III, 10.
Moesta. X, 302.
Mogni. X, 281, 282.
Mohn. III, 216.
Mohr. II, 139; III, 292, 294; VI, 251; X, 298.
Moigno. X, 255.
Molins. VIII, 25.
Mollame. I, 333; II, 144, 145; III, 172; VII, 110.
Möller. I, 90, 245, 390; II, 16, 231, 232, 234; III, 27; V, 179, 181, 182; VI, 32, 37, 173, 174; VIII, 132, 133; IX, 29, 232; X, 269, 277.
Momber. X, 295.
Monniot. VIII, 30.
Montag. I, 360.
Montigny. II, 289, 293; IV, 56.
Montucci. I, 65.
Moock. VI, 320.
Moon. VI, 211.
Mora. X, 292.
Moreau. VI, 183; X, 36; XI, 122.
Morel. IV, 42, 43.
Morellet. XI, 248.
Morgan (de). I, 216, 217; III, 344, 345, 346; X, 144; XI, 16.
Morgenstern. VIII, 228.
Morin. I, 378, 382; II, 208; III, 216; IV, 75, 77; V, 123; VI, 83, 123, 285, 290, 292; XI, 253.
Morstein (v.). X, 292.
Moseley. VII, 77.
Mossa. X, 282.
Most. I, 62, 248; II, 141; III, 292, 342.
Mouchez. V, 121; VIII, 78, 164; IX, 155; X, 111, 112.
Mourgue. VI, 188.
Mousson. III, 96; IV, 55; VII, 35; VIII, 270.
Moutard. I, 211, 316; VIII, 167.
Moutier. I, 154, 383; II, 81, 336; VI, 125; VIII, 26, 74; IX, 175.
Mugnier. IX, 47.
Müller. X, 295, 298.
Müller (C.-E.). II, 352.
Müller (Ed.). V, 170.

Müller (F.). III, 53, 129; V, 320; VI, 249; X, 249.
Müller (H.). I, 132, 136; II, 181; III, 160.
Müller (J.-J.). V, 198, 200, 201, 202; VII, 95; VIII, 271.
Münch. III, 191.
Mundt. VII, 88.
Munk. VI, 44.
Murhard. XI, 15.
Mylord. I, 181; II, 15, 16.
Nägelsbach. IV, 288; VIII, 188.
Narducci. I, 99; IV, 243, 244.
Nares. VII, 80.
Natani. I, 137.
Naudin. III, 118.
Nawrath. I, 100; X, 302.
Necker. III, 131.
Neesen. X, 285.
Negelsbach. X, 292.
Neison. IX, 9, 10, 23; X, 54; XI, 197, 211, 212.
Nell. II, 352; III, 288; VIII, 181, 189.
Neovius. II, 134.
Nesbit. II, 35
Netto. VII, 251.
Neuberg. II, 76, 79; VIII, 219, 221, 222, 223; X, 147, 148.
Neuhaus. X, 292.
Neumann (Carl). I, 124, 129, 131, 132, 135, 231, 238, 239, 264, 313, 314; II, 128, 177, 178, 238, 363, 364, 368; III, 143, 373; V, 196, 197, 198, 202; VI, 110; VIII, 91, 119; IX, 192, 193; X, 202.
Neumann (M.). VI, 92, 98, 99, 100, 101; VII, 140.
Neumayer. I, 181, 391; II, 352; VII, 205.
Neumüller. X, 298.
Neuss. X, 292.
Newcomb. I, 65, 364, 378, 379; II, 214; III, 93, 154, 251; IV, 130; V, 104, 114; VII, 71; IX, 13, 29; X, 54, 70, 92; XI, 213.
Newton. X, 44.
Newton (Is.). III, 131.
Nicodemi. X, 280.
Nicolaïdès. II, 71; IX, 142, 163, 213; X, 145, 256.
Nicoli. VIII, 34.
Niemtschik. I, 209, 210; II, 352; VII, 204, 211, 212, 221; VIII, 224, 226.
Niewenglowski. II, 75; VI, 158, 203; VIII, 29; IX, 150, 175; X, 33, 147; XI, 123.
Nippert. I, 279; III, 85.
Niven. IX, 21.
Noble (W.). V, 108, 112; IX, 12; XI, 76, 212.
Noel. V, 134.
Nördlinger. I, 199.
Nordlund. III, 220.
Normand. VI, 320; X, 256.
Noth. X, 302.
Nöther. I, 239; II, 181, 358, 367; III, 42; V, 240; VI, 244; VIII, 91, 119, 209, 212; IX, 187, 279; X, 199; XI, 272, 273.
Nursinga-Row. X, 52.
Nyberg. I, 360.
Nyrén. I, 289; II, 301.
Oberbeck (A.). VIII, 181; XI, 218.
Oberbeck (L.). XI, 39.
Obermann. VII, 113.
Obermayer. I, 209.
O'Brien. X, 144.
Odenthal. X, 298.
Oelschläger. X, 302; XI, 215.
Ofterdinger. IV, 64.
Ohrtmann. III, 129, 130; V, 320; X, 245, 295.
Okatow. II, 173; VI, 248.
Olivier (A.). I, 24, 26, 60.
Olivier (Th.). X, 144.
Oltramare. I, 156.
Ommanney. X, 47.
Onnen. VIII, 160.
Oppel. III, 50.
Oppenheim. VI, 173; IX, 15; X, 272.
Oppermann. II, 15, 16; IV, 41; VII, 32, 88.
Oppolzer (v.). I, 90, 104, 199, 201, 209, 211, 281, 364; II, 232, 233, 234, 352; V, 176, 177, 183, 184; VI, 167, 172, 177; VII, 138, 139, 205, 208, 211, 214, 215, 218, 221; VIII, 224; X, 274.
Orde Browne. XI, 201.
Oresme. III, 321.
Oriani. X, 252.
Orlando (d'). I, 332.
Orlof. III, 14, 15, 71; VI, 319.
Orsoni. VI, 32.
Ostrogradsky. III, 11.
Ott (Ed.). VIII, 269.
Ott (K. v.). III, 191, 295; VII, 240; X, 298.
Ottema. IV, 211.
Oudemans. I, 88; IV, 77; V, 282; VI, 123; VII, 127, 129; VIII, 182; IX, 36; X, 272.
Oumof. III, 206; VI, 316; VIII, 186, 190.
Ouroussof. III, 12, 13.
Oussof. III, 14.
Ovidio (d'). I, 152, 153, 329, 333; II, 145;

III, 172; IV, 43, 197, 255; VI, 92; VII, 90; X, 284.
Oxmantown (lord). I, 182, 290. [*Voir* Rosse (lord)].
Oyon. XI, 27.
Paci. VII, 91; VIII, 33.
Paczkowski. X, 302.
Padelletti. X, 281, 282.
Padova. I, 104, 223, 333; II, 145; III, 27; VI, 182.
Page. XI, 76.
Painvin. I, 157, 159, 344; II, 76, 78, 80, 340, 368; III, 146, 155, 174, 383; IV, 44, 91, 131, 228; V, 138; VI, 179, 241, 289, 292, 298; VII, 155, 240; VIII, 19, 26, 29; IX, 145, 188; X, 143, 145.
Palermo. II, 147.
Palisa. II, 231, 232; VI, 167; IX, 150; X, 269, 270, 271, 272.
Pallaveri. X, 298.
Palmer. XI, 207.
Pambour (de). III, 117, 153, 305; IV, 73.
Pánek. VI, 96, 99, 100; VIII, 129; XI, 80, 81, 85, 86.
Pantanelli. I, 288.
Pareto. VIII, 234.
Parkes. I, 185.
Parmentier. XI, 124, 247.
Partiot. II, 331.
Parville (de). III, 214; VI, 125.
Pasch. III, 262; IV, 89; V, 291; XI, 32, 33.
Paschen. I, 91; V, 178; VI, 174.
Paufler. X, 292.
Paul. X, 295.
Paulis (de). IV, 255.
Peacock. XI, 16.
Peaucellier. VI, 185; VII, 240; X, 255, 256; XI, 248, 250, 254.
Péchadergne. V, 61.
Pechüle. V, 111, 175; VI, 174, 177; IX, 29 31, 35; X, 267.
Peinlich. IV, 282.
Pellet. I, 64; III, 278; IX, 175.
Pelletreau. XI, 262.
Pellucchi. III, 194.
Peltier. XI, 249.
Pelz. III, 87; VI, 104; VII, 215, 219.
Penny. I, 311.
Penrose. IX, 19; XI, 206.
Pépin (le P.). II, 36; V, 122; VI, 289; VIII, 42, 168; X, 75; XI, 157.
Percin. VII, 240; XI, 252.
Pereire. IV, 272.
Peri. X, 143.
Perlewitz. VI, 247.
Perrier. IV, 85, 130; VII, 159; X, 111, 112.
Perrin. V, 192.
Perrodil (de). XI, 262.
Perrodon. XI, 78.
Perrot de Chaumeux. VII, 144.
Perrotin. IX, 150; XI, 211.
Perry (G.). V, 125, 133.
Perry (le Rév. S. J.). I, 366; III, 247, 249; VI, 228, 236, 308; VII, 62, 63, 79; IX, 26; XI, 200.
Peschka. XI, 214.
Peslin. VIII, 167, 169, 170; IX, 150, 153, 162.
Pessl (v.). X, 295.
Peterin. VII, 208.
Peters (C.-A.-F.). I, 281; V, 184.
Peters (C.-F.-W.). I, 90; II, 232; III, 196; V, 183; VI, 174; IX, 231; X, 271, 272, 274.
Peters (C.-H.-F.). I, 88, 364; II, 337, 339; IV, 76; V, 177, 179, 181, 184; VI, 167, 169, 172, 177; IX, 30, 35; X, 267, 269, 271; XI, 211.
Petersen. I, 180, 181, 284; II, 16; V, 277, 278, 279; VI, 240; VII, 31, 88, 89; VIII, 139.
Peterson. III, 12, 13.
Petit. VII, 304; XI, 249.
Petterson. I, 199, 247.
Pettigrew. V, 57.
Petzsch. X, 302.
Petzval. X, 143.
Pfaundler. VII, 208, 210; VIII, 225.
Pfeiffer. I, 180.
Pfeil (v.). III, 88; XI, 218, 219, 220.
Philippin. VIII, 222.
Phillips (E.). I, 154, 377; III, 55, 57, 150; IV, 130; V, 125; VI, 201, 203, 296; X, 256.
Phillips (J.). I, 184.
Phragmén. I, 178; X, 170.
Piani. IV, 249; X, 142, 144.
Piarron de Mondésir. I, 30, 32, 33; XI, 266.
Piazzi. I, 104; X, 252.
Picardat. VII, 240.
Picart. III, 289; VI, 188, 298; VIII, 25, 26, 28, 30; IX, 173.
Pick. III, 53.
Picquet. III, 65, 244; VI, 80; VII, 173.
Pieper. X, 298.
Pierre. XI, 260.
Pierre (Is.). III, 119.
Pihl. I, 391; II, 329; VI, 308.

Pinson. VII, 304.
Pinzger. X, 302.
Piotrowski. XI, 270.
Pistoye (de). VII, 155, 168.
Pittarelli. VI, 111; VIII, 33, 34; X, 283.
Plagge. III, 53; VII, 96.
Plana. V, 65; X, 142.
Plašil. XI, 83.
Plateau. IV, 56; VI, 69.
Platter. VII, 208.
Plch. XI, 86.
Plücker (Julius). I, 73, 313; III, 10, 59; V, 313; VI, 112, 253.
Plücker (J.). II, 297; III, 96.
Plummer (J.-J.). II, 235; VII, 60, 61, 68; IX, 34, 270, 274; XI, 202, 212.
Plummer (W.-E.). III, 250; VI, 82; VII, 59; IX, 12, 13.
Pochhammer. III, 141, 240, 242, 372; V, 292; VIII, 188; XI, 38, 47.
Poggendorff. IV, 202, 203; VI, 42; X, 285; XI, 16.
Pogson (N.-R.). V, 115; VI, 312; XI, 205.
Poincaré. VIII, 30.
Poinsot. IV, 7; X, 144, 145.
Poisson. III, 131.
Pokorný. VI, 100.
Polignac (de). III, 346.
Pollock. I, 184.
Poncelet. I, 336; II, 8; III, 10; VI, 160, 273.
Popof. VIII, 208; XI, 34.
Porcelli. IV, 197.
Poreto. VIII, 234.
Posse. IX, 174.
Potocki. I, 99.
Pouillet. VI, 160.
Poulain. VII, 240; XI, 252.
Poulet. XI, 262.
Powalky. I, 89, 363; VI, 168; IX, 26; X, 267.
Powell. II, 153.
Prætorius. X, 298.
Pratt. VI, 230; VII, 77.
Pražmowski. III, 115.
Preobrajensky. III, 15; VII, 238.
Prestet. XI, 27.
Pretzler. X, 298.
Prey. I, 280.
Price. I, 40.
Prince. III, 248; VI, 169; IX, 13; XI, 201.
Pringle. IX, 19.
Pringsheim. X, 289.
Pritchard. IX, 12; X, 46; XI, 194.
Prix. X, 295.
Proclus. VIII, 262.
Proctor. I, 391; II, 151, 152, 154; III, 245, 246, 247, 248, 249, 250; V, 103, 104, 105, 110, 111, 118, 240; VI, 299, 304, 313; VII, 55, 56, 60, 61, 63, 67, 74; X, 53, 90.
Proja. II, 19.
Prondzynski (B. v.). I, 90.
Prouhet. X, 144.
Provenzali. III, 105; V, 15, 16, 20; VII, 136; VIII, 146.
Prym. III, 139, 141, 244.
Puiseux. I, 194; II, 33; III, 131, 319; V, 128; VI, 44, 135, 196, 288; VIII, 77, 170, 256; IX, 192, 218.
Pullich. VIII, 138; X, 172.
Puluj. VIII, 190.
Purser. I, 309; X, 145.
Puschl. VII, 203, 208, 219; VIII, 225.
Quapp. X, 292.
Quesneville. I, 212.
Quercia. VIII, 259.
Quet. IV, 129.
Quetelet (A.). II, 128, 293, 297, 336; IV, 55, 58.
Quetelet (E.). X, 106.
Quidde. X, 292.
Quincke. I, 239; XI, 272, 273.
Raabe. VII, 212.
Radakowitsch. III, 256.
Radau. I, 29, 88, 89, 92; II, 177, 266; VI, 160.
Ragona. V, 18.
Rakhmaninof. V. 299.
Rammelman Elsevier. IV, 211.
Rankine. I, 162, 367; V, 59; VI, 229; VII, 73, 74, 75, 77; VIII, 259.
Ransome. XI, 258.
Ranyard. III, 249, 250; V, 106, 112; IX, 11, 25.
Rapisardi. VI, 160.
Rasch. IV, 212.
Ratchnisky. III, 14.
Rath. III, 191; VIII, 178.
Rayet. I, 341; VI, 81, 82, 298, 319; VII, 144.
Rayoonathachary. III, 248.
Realis. II, 75; III, 171, 173; VI, 187; VIII, 26; IX, 176.
Rechenbach. IV, 272.
Reech. IX, 155; X, 145.
Reed. VI, 231.
Regis. I, 332; V, 271.
Regnani. III, 105.
Reidt. IV, 207, 291, 292; V, 169, 170, 171; VII, 95; X, 298.

Reier. X, 302.
Reimann. I, 360.
Reiss. II, 235; VI, 243; XI, 85.
Reitlinger. II, 141.
Renan. VII, 156.
Renny. I, 306, 307.
Renou. II, 210.
Renoust des Orgeries. XI, 260.
Renshaw. IX, 266.
Resal. II, 332, 334, 335, 337; III, 29, 57, 95, 108, 111, 115, 215; IV, 72, 83, 128; V, 121, 192; VI, 80, 182, 184, 185, 188, 198, 204, 273, 285, 290, 293, 296; VII, 158, 170, 200, 202, 304; VIII, 37, 41, 76; IX, 122, 124, 152, 226; X, 82.
Respighi. II, 19, 82, 83; III, 148, 302; IV, 73; VI, 28, 30, 43, 83, 87; VIII, 233, 234; IX, 233.
Retali. III, 172; VII, 92; VIII, 36.
Réthy. XI, 220, 272.
Reuschle. VIII, 189; X, 302.
Reuter. III, 191.
Revellat. VI, 79.
Rey. X, 34.
Reye. I, 133, 276, 314, 315; II, 238; III, 145, 258; VI, 124, 289; VII, 231, 251, 252, 260; IX, 180.
Ribaucour. I, 64; III, 303, 306; IV, 76; V, 125, 134; VI, 45; VIII, 166.
Riccardi. II, 160, 352; IV, 227.
Richard. VII, 240; XI, 251.
Richaud. II, 19.
Richelmy. V, 267, 268.
Richelot. II, 129; IV, 200.
Ricour. XI, 250.
Ricq. VII, 202.
Riecke. IX, 278; XI, 274, 276.
Riefler. I, 281.
Riemann. I, 26, 40, 131, 377; II, 225; III, 160; V, 20, 79; IX, 192; XI, 97.
Riess. VI, 40, 48; VII, 135; X, 286.
Rigaud. XI, 200.
Řiha. I, 209.
Rink. VIII, 160, 182.
Risbec. VI, 46.
Ritsert. IV, 292; VI, 250; VIII, 187.
Ritter. III, 288; VII, 304.
Robert (de). III, 288.
Roberts (M.). I, 312, 314, 315, 373, 377; VI, 240, 242; X, 143.
Roberts (S.) II, 269; III, 10, 101, 345, 347; IV, 43, 45, 47, 48, 49; V, 240; VI, 206, 211, 212; VII, 25, 26, 27, 28, 29.
Roberts (W.). I, 377; VI, 241.
Roberts (W.-Ch.). VII, 86.
Robinson. I, 185; VI, 310; IX, 231; XI, 207.
Rodet. VI, 188.
Roger. II, 279; III, 306; V, 134.
Rogers. III, 154; V, 179.
Rogerson. XI, 211.
Rogg. XI, 16.
Rogner. IV, 281.
Röhrs. I, 218.
Roiti. III, 29.
Rolland. I, 269; III, 110.
Rollwyn. I, 391.
Romer. XI, 113.
Rosanes. I, 360; II, 160, 239, 367; III, 241, 293; IV, 91, 207, 287; V, 240: VI, 195; VIII, 118; XI, 29.
Roscoe. I, 368; III, 128, VI, 231; VII, 78.
Rosén. I, 241, 292.
Rosse (lord). I, 182; 290; VI, 306; VII, 76, 84; IX, 16; X, 50.
Rouché. IV, 112; VII, 304; XI, 121.
Roudaire. VII, 163.
Roulet. XI, 250.
Rouquet. XI, 113.
Rousseau. III, 119.
Rousset. VII, 240; XI, 252.
Routh. II, 271; VII, 84.
Row. V, 115.
Royston-Pigott. I, 369; VII, 75, 85; XI, 204.
Rozé. III, 58.
Rubenson. I, 178; X, 171.
Rubini. VI, 21; VIII, 64; XI, 145.
Ruchonnet. II, 80; IV, 44; VI, 187; IX, 48.
Ruffini (F.). II, 160; VII, 241; VIII, 32.
Ruffini (P.). X, 145.
Rühlmann. V, 202.
Rümker. II, 232, 235; V, 176, 179, 182, 183; VI, 172; X, 272.
Rump. III, 87; X, 302.
Russell (C.-W.). V, 108; VI, 306; VII, 63.
Russell (W.-H.-L.). I, 163; VII, 73, 76, 82; X, 143.
Rutgers. V, 281.
Rybička. VI, 88.
Ryew. VI, 111.
Sabato. I, 199, 200.
Sabine. I, 184, 367; VI, 230, 236; VII, 73.
Sabinine. III, 13, 73; IV, 58; VI, 187.
Sacchetti. I, 219.
Sacchi. X, 145, 298.
Sachse. X, 298.

Sadous. XI, 254.
Šafařík. VIII, 229, 232.
Sągajło. VI, 159.
Sagols. II, 276.
Sainte-Claire Deville (Ch.). III, 215.
Saint-Germain (de). IV, 41; VI, 186, 187; VII, 170; VIII, 30.
Saint-Loup. I, 232; II, 266; VI, 186; VIII, 42; X, 143.
Saint-Quentin. XI, 246.
Saint-Robert (de). III, 288; VIII, 64.
Saint-Venant (de). I, 32, 63, 64, 66, 96, 156, 213, 343; II, 37, 212, 213, 330, 331, 334, 335, 336; III, 57, 89, 92, 93, 115, 149, 195, 213, 214, 215, 296, 297; IV, 127, 128; V, 135; VI, 77; IX, 162, 225; X, 144.
Saleta. IV, 28.
Salicis. I, 382; III, 115.
Salmon. I, 40, 54, 307; III, 10; IV, 96; V, 193; VIII, 65; X, 145.
Saltel. II, 80; IV, 58, 176; VI, 185, 188; VIII, 222; IX, 48, 149, 154, 175.
Saltzmann. X, 302.
Salvert (de). VII, 48.
Sancery. IV, 45; IX, 175.
Sand. X, 272.
Sandberg. II, 235; V, 175; X, 267, 271.
Sands. IX, 36; X, 122.
Sang. II, 201, 275; V, 58, 165, 167.
Sannia. I, 329; IV, 43.
Santagata. IV, 249.
Sardi. I, 152, 153, 154; VI, 111.
Sarrau. VII, 200; XI, 75.
Sauveur. IV, 210.
Savitsch. I, 240, 241; III, 250; IV, 59; V, 160; VI, 32; VIII, 143, 145.
Schell. I, 61, 208; III, 131, 191, 295; IV, 291; VIII, 187.
Schellbach. X, 142; XI, 34.
Schellen. III, 191, 295.
Schendel. III, 292; VIII, 191; XI, 30, 31.
Scherk. X, 302.
Schering. I, 128, 238; II, 148; III, 45, 47, 48; IX, 277; XI, 272, 273, 274.
Scherling. III, 192, 295; VIII, 227.
Schiaparelli. I, 391; III, 81; IX, 235; X, 251, 252, 253.
Schilke. VIII, 190.
Schiller. V, 295; X, 100.
Schjellerup. I, 89; X, 276.
Schläfli. I, 312, 313, 314, 374, 375; II, 357, 362; III, 145, 147; V, 289, 291; VI, 244, 245; VII, 251.
Schlegel. III, 53; VI, 247, 248; VIII, 118; X, 292.
Schlesinger. I, 208, 209, 210; III, 160; IV, 280.
Schleusing (v.). V, 260.
Schlögelhofer. X, 298.
Schlömilch. I, 40, 50, 59, 60, 278, 279; II, 66, 138, 352; III, 293; IV, 285, 288; V, 196, 201; VI, 249, 251; VIII, 188, 190.
Schlotke. I, 200; II, 160; III, 192, 295.
Schlotter. III, 192.
Schmidt (Fr.). V, 61.
Schmidt (G.). I, 100.
Schmidt (J.-F.-J.). I, 88, 89, 232, 365; III, 95; V, 175, 178, 182, 183, 184, 185; VI, 167, 172, 173; IX, 30, 35, 36; X, 263, 267, 269, 270, 271, 272, 276, 278; XI, 259.
Schmidt (J.-R.). IV, 210.
Schmidt (K.). X, 299.
Schmidt (L.). X, 299.
Schmidt (W.). VIII, 185.
Schmiedhauser. X, 302.
Schneebeli. IV, 53, 55; V, 204; VII, 35; VIII, 269.
Schneider. X, 302.
Scholz. X, 250.
Schönborn. X, 299.
Schönemann. VI, 250.
Schönfeld. I, 87, 89, 90, 364; V, 175, 177; IX, 36, 27 X, 269, 276; XI, 258.
Schorlemmer. III, 128.
Schorr X, 7
Schoute. V 280.
Schrader. X, 292, 302.
Schrader (F.). III, 119.
Schramm. I, 313, 372; IV, 292; X, 299.
Schreiber. X, 292.
Schröder (I.-C.). IV, 210.
Schroeder (E.). II, 140, 182, 362; X, 292, 302.
Schröter. II, 239; IV, 87, 292; VII, 227, 230; VIII, 30, 79, 117, 215.
Schubert (E). I, 89, 281, 364, 365, 391; V, 175, 183; IX, 36; X, 272.
Schubert (F.-C.). I, 360.
Schubert (H.). I, 63, 278; III, 141, 159, 24 291 XI, 275, 277.
Schubert (J.). VIII, 190.
Schulenburg (v. der). II, 289.
Schulhof. I, 281; II, 235; V, 175, 177, 178, 183, 185, 186; VII, 210; IX, 35; X, 264, 266, 269, 278; XI, 192.
Schultz (H.). IX, 30; X, 48, 265.
Schultze (Ed.). X, 242, 292.
Schulz (K.). X, 299.
Schulze. X, 295.

Schumann (Ad.). VIII, 216.
Schumann (E.). X, 303.
Schur. I, 88.
Schuringa. VIII, 181.
Schwabe. X, 272.
Schwartz (F.-H.). X, 269.
Schwarz (A.). X, 295.
Schwarz (H.). III, 51, 52; VIII, 227; X, 299.
Schwarz (H.-A.). I, 374; III, 369; IV, 51, 53, 202, 239; VI, 40, 42; VII, 224; XI, 34, 35.
Schwarzkopf. X, 299.
Schweizer. III, 14, 213; XI, 27.
Sclopis. V, 273.
Scot. I, 160.
S. E. IV, 207.
Seabroke. II, 153; V, 106, 124; VII, 82; IX, 12; X, 43.
Secchi. I, 30, 88, 334, 344, 378; II, 19, 82, 212, 233, 279, 334, 336, 339, 383; III, 54, 57, 95, 104, 105, 106, 110, 112, 113, 150, 297, 302, 306; IV, 74, 76, 79, 128; V, 15, 16, 18, 114, 123, 125, 135, 137, 272; VI, 43, 45, 46, 77, 121, 122, 169, 295, 296; VII, 135, 136, 158, 199; VIII, 39, 145, 146, 147; IX, 154; X, 256.
Sédillot. I, 99; II, 147; IV, 139, 246; VI, 44, 254; VII, 123.
Seeger. X, 299.
Seeling. I, 101; III, 85.
Seidel. I, 360; III, 244; VI, 213.
Seidelin. I, 3[illegible]9; VII, 89.
Selling. VII, 228.
Semeijns (Meindert). VI, 253.
Serdobinsky. V, 295, 300; VII, 238; X, 103.
Séré de Rivière. XI, 246.
Sergent-Marceau. II, 160.
Serpieri. V, 18.
Serret (J.-A.). I, 28, 166, 196, 254, 340, 378; II, 97, 244, 331, 334; III, 10, 113, 215; VI, 46, 138, 140; VII, 157; VIII, 64; X, 146.
Serret (P.). I, 9; II, 76; X, 144.
Settimani. I, 232.
Sexe. I, 232.
Seydler. I, 281; VI, 94, 98; VII, 210, 213, 216, 264; VIII, 124, 128; XI, 80.
Shanks. VII, 73, 79, 84.
Siacci. II, 146; IV, 200, 256; V, 271, 276; VI, 31, 111, 245, 285, 289; XI, 79.
Sickenberger. VII, 96.
Sidgreaves. VII, 79.
Sidler. X, 295.
Siebeck. I, 314.
Siebel. VIII, 181; XI, 214, 218.
Siemens. X, 285, 290.
Silbermann. III, 149, 153, 295.
Silldorf. VI, 251; VIII, 177, 189; IX, 240; X, 299.
Šimerka. III, 83; XI, 83.
Simon (C.). I, 27; II, 11, 282; III, 169.
Simon (M.). XI, 47.
Simoni. VIII, 265.
Simony. VI, 251; VII, 114, 116; VIII, 189; IX, 280.
Slatter. V, 114.
Sloudsky. III, 12, 13, 14, 15, 16, 77, 81, 82; V, 299; VI, 316; X, 101, 105.
Smith (C.). VI, 211.
Smith (H.-J.-St.). I, 181, 315, 373, 375; III, 345, 346, 347; IV, 41, 45; VII, 27; XI, 7.
Smith. (J.-H.). I, 200.
Smith (W.-R.). I, 161; II, 275.
Smyth (Piazzi). I, 360; V, 112; VII, 80; X, 56.
Sobička. VIII, 124.
Sohncke. VII, 134, 225; XI, 16.
Sokolof. III, 13, 15, 205.
Šolin. III, 170; VI, 107; VIII, 128; XI, 81.
Sommer. X, 292.
Somof. I, 240, 241; II, 299; III, 14, 131, 210, 342; IV, 58, 59; VI, 33; VII, 190, 191, VIII, 143.
Sonderhof. I, 249; IV, 285.
Sonine. III, 208, 212; V, 292, 299; VI, 317; X, 96.
Sonnenburg. III, 192; X, 303.
Sonnet. I, 200; X, 144.
Sonrel. I, 344.
Souchon. III, 33.
Souillart. VI, 57; VIII, 39.
Souvorof. IV, 180.
Souza (de). VII, 75.
Sparagna. VII, 124; VIII, 262, 267.
Sparre (Magnus de). IX, 48, 95; X, 256.
Spear. V, 104.
Spieker. I, 248; III, 192.
Spielmann. X, 303.
Spina. II, 83; X, 146.
Spitz. I, 331; II, 383; IV, 292.
Spitzer. II, 366; III, 84, 85, 87 373, 375, 376; XI, 218, 220.
Spörer. I, 87, 90, 280, 364; II, 232; IV, 203; V, 175, 177, 185; VI, 41; IX, 35, 235; X, 269, 277.
Spottiswoode. I, 155, 163, 213, 368; VI,

43, 124, 236; VII, 26, 75, 80, 197, 198; X, 143.
Spratt. VII, 78.
Spriggs. II, 160, 383.
Staeger. X, 303.
Stahl. II, 366; IX, 183; X, 246, 299.
Stahlberger. II, 141.
Stamkart. I, 186; IV, 211, 212; V, 280; VII, 128.
Stammer. XI, 215.
Stampfer. II, 383; III, 192.
Stark. I, 281.
Staudigl. I, 60, 209; II, 383; III, 295; VII, 205, 214; VIII, 224.
Stebnicki. IV, 59.
Steen. I, 178, 179, 282, 369, 370; II, 15, 16, 19; IV, 43; V, 277, 278, 279; VII, 32, 33, 86, 87, 89; VIII, 138, 139, 141; X, 143.
Stefan. I, 210; VII, 204, 209, 210, 213, 215, 216, 217, 218; VIII, 225.
Steiner. III, 10; VIII, 191.
Steinhauser. II, 160; III, 87, 160.
Steinheil. VI, 213.
Steinschneider. III, 292, 293; IV, 245; VI, 250, 255; IX, 280.
Stephan. I, 40, 363; II, 232, 266; III, 117; IV, 80, 82, 83, 85; V, 104, 109, 137, 138, 181, 182, 183; VI, 43, 45, 81, 82, 170, 286; VII, 62, 154, 199; VIII, 42, 76; IX, 13, 15, 161, 162; X, 270, 271.
Stern (M.-A). I, 26, 239; III, 45, 47, 48, 245; VII, 260; IX, 179, 183, 277; XI, 47.
Stern (S.). VII, 203, 204, 210, 217.
Stewart (B.). I, 185, 368; II, 150; VII, 75, 79, 80, 84, 85.
Stiattesi. II, 148; VI, 253.
Stieltjes. VII, 127, 130.
Stockwell. III, 154.
Stoddard. III, 154.
Stoecklin. XI, 262.
Stoeckly. VIII, 178.
Stokes. I, 184, 218; VII, 81; XI, 7.
Stolétof. III, 70, 292, 340; IV, 126; V, 297.
Stoll. VIII, 122; X, 299, 303.
Stolz. I, 209; III, 292, 340; X, 197.
Stolzenburg. X, 299.
Stone (E.-J.). II, 154; V, 159, 175; VI, 236, 314; VII, 69, 74, 79; IX, 10; XI, 205, 206.
Stoney (B.). I, 308, 309.
Stoney (G.-J.). I, 308.
Stoseck. X, 292.
Stouff. IV, 42.
Strabbe. IV, 210.
Strange. III, 246; V, 110; VII, 80.
Strasser. VI, 170; X, 271.
Strehlke. X, 292.
Streintz. VII, 221.
Streit. X, 299.
Strnad. VIII, 122, 123, 125.
Strouhal. VI, 98.
Strutt (lord Rayleigh). I, 368; IV, 49; VI, 228; VII, 26, 28, 29, 75, 77.
Struve (O.). I, 240, 242; IV, 80; V, 108; VII, 61, 62, 191; VIII, 144, 145; IX, 20; X, 87, 93.
Strüver. V, 273.
Strzelecki (v.). VII, 217.
Stuart. VII, 82.
Stubba. III, 384.
Stubbs. V, 240.
Studnička. II, 256, 383; IV, 198; VI, 89, 91, 96, 97, 99, 100, 101, 102, 103, 104; VII, 260, 262, 263; VIII, 125, 127, 128, 129, 229, 232; IX, 49, 51; XI, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 147.
Sturm (C.). V, 192; X, 256.
Sturm (R.). I, 136, 371; II, 50, 51, 53, 356; III, 147, 336; IV, 96; VI, 240; VIII, 118, 121, 216; IX, 180; XI, 31, 36, 273.
Stürmer. I, 391.
Sundell. VI, 36.
Suter. VI, 14, 254; X, 64.
Sylow. I, 232, 285; III, 199; VIII, 90.
Sylvester. III, 344, 345, 347; VII, 25.
Sczenic. X, 299.
Tacchini. V, 18, 124, 132, 134; VI, 77, 82; VII, 198; VIII, 74.
Tägert. X, 292.
Tait. I, 161; II, 202, 274, 275; IV, 278, 292; V, 164, 166, 167, 168; VI, 112, 160, 161; VII, 84.
Talir. X, 296.
Talmage. VI, 167; IX, 36.
Talyzine. III, 13, 15.
Tamchyna. X, 299.
Tano. II, 141, 145.
Tannery. X, 82; XI, 183, 221.
Tardy. I, 377.
Tarry. III, 59, 119, 149, 298; IV, 77; VI, 30.
Tastes (de). III, 96, 118, 119.
Tchebychef. II, 259; III, 12, 13, 15, 36 78; VIII, 18, 20, 22.
Tebbutt. V, 106, 183, 186; VI, 177; IX, 13, 26; X, 46, 52, 93; XI, 201.
Teding van Berkhout. IV, 211, 212.

Teichert. X, 296.
Tempel. II, 235; V, 177, 183; X, 252, 265.
Tennant. V, 106, 110, 158; VI, 300; VII, 65, 68; X, 44, 55, 92; XI, 197, 199.
Terquem (A.). II, 267, 333.
Terrier. X, 35; XI, 122.
Tessari. V, 270.
Thalen. I, 177, 178.
Theorell. I, 200, 247; V, 168.
Thiele. I, 180, 370; II, 96; VII, 30, 31; VIII, 139; X, 2[illegible]9.
Thieme. XI, 219.
Thomae. I, 59, 61, 232; II, 236; III, 138, 291, 294, 373; IV, 236, 285; V, 96; VI, 240, 243, 251; VIII, 122, 189; XI, 40, 275.
Thoman. IV, 41; XI, 27.
Thome. III, 367; IV, 237; VI, 192; VII, 256; X, 36.
Thomson (sir W.). I, 160, 163; II, 274; IV, 278, 292; V, 7, 164, 166, 167, 241; VII, 77, 78, 91; XI, 7.
Thorpe. VI, 231; VII, 78.
Thoulet. VI, 295.
Thoyot. XI, 265.
Tidblom. VIII, 137.
Tiele. II, 232; IX, 235.
Tietjen. I, 88, 89; II, 232, 233; V, 184; VI, 170, 173, 174; IX, 235; X, 268, 269, 271, 277.
Tirelli, VIII, 33; X, 282.
Tisserand. I, 155; II, 213, 246, 339, 340; III, 148; IV, 79, 86; VI, 292; VII, 154; IX, 20, 172; XI, 192.
Tissot. I, 166, 272.
Todhunter. I, 40, 216; II, 160, 383; IV, 273; V, 109, 116; VI, 22, 276, 300; VII, 74, 76, 8[illegible], 82.
Tognoli. I, 288, 331; II, 143, 144, 146; III, 173; IV, 196, 199; VI, 112; VII, 92; VIII, 33, 34, 35; X, 284.
Tomline. IX, 274.
Tonelli. XI, 277.
Töplitz. I, 61; X, 293.
Topsoe. V, 86.
Toreili. IV, 199; VI, 110; VIII, 34; X, 284.
Tortolini. II, 148; III, 104, 105; VII, 272, 279; X, 143.
Touchimbert (de). III, 119.
Townsend. III, 345; VI, 205, 207, 208, 209, 211.
Transon. II, 78, 334; IV, 44; VI, 182, 184, 187; VIII, 27, 29; X, 142, 144.
Treichl. X, 299.
Tremeschini. II, 243; III, 119.
Trepied. VIII, 74.
Tresca. III, 57, 95; IV, 81, 85; VI, 43, 293; VII, 161; IX, 152, 162.
Trudi. I, 153, 315; IV, 254; VIII, 33, X, 143.
Trzaska. VI, 152, 153, 156.
Tschermak. I, 391.
Tserasky. VI, 319.
Tsinger. III, 11, 13, 15, 81, 211; V, 299; X, 100.
Tucker. III, 345.
Tupman. V, 106; VI, 310, 312; VII, 56; X, 37.
Turazza. IV, 28.
Tychsen. I, 40, 179; II, 15, 16; VIII, 138.
Tyndall. I, 368; III, 256.
Uhdolph. X, 299.
Ulffers. I, 200.
Ulman. IV, 211.
Ulrich. III, 46, 47, 48; IX, 277.
Unferdinger. I, 208, 210, 249, 264, 279; II, 383; III, 86, 87, 373, 374, 377; IV, 282; VII, 138, 139, 141, 204, 212, 221, 222; VIII, 177; X, 296.
Unterhuber. X, 296.
Unverzagt. III, 295; X, 293.
Uth. X, 303.
Vachenko-Zakhartchenko. III, 15.
Vachette. VIII, 31; IX, 176; X, 32, 34; XI, 122, 123.
Vacquant. V, 96.
Vaillant (le maréchal). III, 148, 214.
Valat. V, 62.
Valentiner. I, 264; II, 329; III, 21; V, 179; VI, 173; X, 265, 267.
Valeriani. I, 154; III, 173; IV, 254; VII, 91, 109; VIII, 35; X, 279, 280.
Vallès. III, 290; X, 304.
Valson. I, 99, 105, 215.
Van Blanken. IV, 211, 212.
Van den Berg. IV, 212.
Van der Mensbrugghe. II, 292, 296.
Vandermonde. X, 145.
Vanderweyde. III, 154.
Van der Willigen. VII, 127, 128, 129, 130; VIII, 183.
Van Diesen. VII, 127.
Van Geer. V, 280; VI, 247; VII, 128; VIII, 186.
Van Haarst. IV, 212.
Van Hemert. IV, 210.
Van Otterloo. IV, 204.
Vañous. XI, 81, 82.
Van Pott. VIII, 220.
Van Rees, X, 142.

Vantin. III, 290.
Varaigne. XI, 248.
Vassal. III, 353.
Vassilief. XI, 120.
Vazeille. IV, 40.
Vecchio. I, 152; IV, 200; VII, 91.
Vega (v.). I, 264.
Veltmann. I, 90, 281; II, 141; III, 294; XI, 220.
Verdam. IV, 212.
Verdal (de). XI, 246.
Verdet. V, 97.
Vering. X, 296.
Véronique (le général). XI, 255.
Versluys. I, 100, 249, 392; III, 86, 88, 376; IV, 212; V, 282; VIII, 160.
Vervaet. XI, 84, 85.
Vicaire. III, 110, 118; IV, 76; V, 133, 136; VI, 43, 46, 288, 297; VII, 154.
Vierordt. V, 180.
Villarceau (Y.). I, 336, 339, 378, 383; II, 38, 203, 334, 338; III, 57, 304, 305; IV, 73, 74, 81, 82, 83; V, 134; VI, 76, 139; VIII, 256; IX, 162; X, 112; XI, 192.
Villebonnet. XI, 255.
Vimercati. VII, 121.
Vincent. V, 320; X, 144.
Vinclaire. XI, 249.
Vinogradsky. XI, 114, 119.
Vinson. III, 214.
Violeine. IV, 272.
Violle. VII, 158, 163.
Virieu (de). X, 33.
Virlet d'Aoust. VII, 201.
Vito. I, 288.
Vogel. II, 232, 233; V, 180, 202; IX, 34, 235; X, 269, 272.
Vogl. XI, 255.
Volkmann. V, 196, 199.
Volpicelli. I, 375; II, 20, 149; III, 298; IV, 83; VI, 28, 29; VIII, 233, 234.
VonderMühll. II, 240; VIII, 89, 209.
Vorsterman van Oijen. II, 147.
Voss. X, 296.
Voss (A.). IV, 289; VI, 247; X, 177; XI, 273, 274, 276.
Vryer. IV, 210.
Vydra. VI, 88.
Wackerbarth. I, 247, 296; V, 104; X, 93.
Wagner. XI, 248, 253.
Wagner (C.). VIII, 172; X, 299.
Wagner (H.). IV, 205.
Waha (de). X, 303.
Waille. VI, 187; IX, 173.
Walda. X, 299.
Walker (J.-J.). III, 347; IV, 47, 49.
Walker (J.-T.). V, 108; VII, 77.
Wallace. IX, 270.
Walras. VII, 152.
Waltenhofen (v.). I, 211; VI, 105, 107; VII, 206, 208, 222; VIII, 229; IX, 49, 240.
Walton (J.). II, 383.
Walton (W.). II, 267, 269, 270, 271, 272, 273, 274; IV, 42, 45; VI, 204, 205, 206, 208, 209, 210, 212.
Wand. I, 360; IV, 292.
Wangerin. V, 320; VII, 112, 113, 114, 116; X, 247, 299.
Wargnies-Hulot. IX, 48.
Warren (J.). VI, 212.
Warren de la Rue. I, 185, 368; II, 150; VII, 75, 79, 80, 85; IX, 23; X, 89; XI, 195.
Wasserschleben (v.). IV, 281; VIII, 180; XI, 216.
Wassmuth. I, 360; VII, 140, 209.
Watelet. X, 144.
Waters. VII, 61, 68.
Watson (J.-C.). IV, 130; V, 177, 178; IX, 29, 35, 226; X, 277; XI, 211.
Watson (W.-H.). VI, 209, 212.
Webb. III, 248; V, 107; X, 54; XI, 202, 206.
Weber. X, 296.
Weber (H.). I, 25, 124; II, 176; III, 143, 259; IV, 89; V, 203, 283; VI, 196; VIII, 117; X, 177.
Weber (L.). X, 177.
Weber (W.). I, 131; V, 266.
Weerth. X, 303.
Weierstrass. I, 187; VI, 189.
Weihrauch. I, 360; VIII, 185, 189; IX, 239, 240.
Weil. VII, 239.
Weilenmann. VII, 35; VIII, 272.
Weiler. I, 89, 90, 96; VIII, 210; IX, 239.
Weinberg. III, 81.
Weingarten. I, 87, 90.
Weisbach. III, 256.
Weiss. I, 209, 211, 363, 365; II, 235, 334; V, 181; VII, 208, 209, 212, 216; IX, 31.
Weissenborn. I, 264; X, 300.
Weller. III, 192.
Welsch. II, 77.
Wenham. VII, 82.
Wenzel. I, 360.
Wernekke. X, 300, 303.
Wernicke. III, 192; X, 289.

Werr. X, 303.
Wertheim. X, 296.
Wesely. III, 293.
Weston. III, 246, 248.
Westphal. VII, 119.
Wettstein. VII, 35.
Weyer. I, [illegible]92.
Weygandt. II, 384.
Weyr (Ed.). I, 24, 62, 208; III, 24[illegible]; IV, 89, 286; V, 1[illegible]4, 126; VI, 90, 97, 241; VII, [illegible]; VIII, 11[illegible], 126; IX, 37.
Weyr (Em.). I, 40, 62, 63, 208, 209, [illegible]; II, 140, 141, 1[illegible], 145, 354, 358, 384; III, 1[illegible], 17[illegible], 205, 289, 2[illegible], 2[illegible], 294, 336, 371; IV, 1[illegible], 200; VI, 80, 92, [illegible], 98, 1[illegible], 1[illegible], 104, 105, 106, 107, 241; VII, 140, 1[illegible], 164, 203, 205, 209, 21[illegible], 221, 2[illegible]; VIII, 112, 123, 125, 126, 22[illegible], 231; IX, 37, [illegible].
Weyrauch. III, 371; VI, 251; VIII, 187, 19[illegible].
Wharton. VII, [illegible].
Wheatstone. VII, 77.
Whitehouse. VII, 78.
Wicksen. X, 17[illegible].
Wiecke. X, [illegible].
Wiedemann. V, [illegible].
Wiederhold. X, 1[illegible].
Wiener. I, [illegible], 312; II, 354; III, [illegible]; VIII, [illegible]; X, [illegible].
Wiesing. X, [illegible].
Wijkander. V, 184; VIII, 132; IX, 36.
Wild (H.). I, 3[illegible]; IV, 58, [illegible]; VI, [illegible]; VII, [illegible]; VIII, [illegible].
Wilde (F.). X, [illegible].
Wilk[illegible]. XI, [illegible].
Wi[illegible]. X, [illegible].
Williams (J.). VII, [illegible].
Williams (W.-M.). I, [illegible].
Williams[illegible]. V, [illegible]; VI, [illegible].
Wilson (J.-W.). V, [illegible]; IX, [illegible]; X, [illegible].
Winckler (A.). I, [illegible]; XI, [illegible].
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
Wittwer. I, 60, 63, 2[illegible]; IV, 284; VI, 248, IX, 138.
Wochel. III, 1[illegible]2.
Wockel. I, 39[illegible].
Woepcke. VIII, 2[illegible]4.
Wohlwill. III, 2[illegible]5, 384.
Woitylack. X, 2[illegible].
Wolf (C.). I, 3[illegible]4, 311; IV, [illegible]5; VI, 198, 28[illegible]; VII, 1[illegible]; IX, 1[illegible], 225.
Wolf (E.). I.I. [illegible].
Wolf (R.). I, [illegible], 3[illegible]2; II, 152, 384; III, [illegible]; IV, [illegible]; V, 179, 203, 2[illegible]; VI, [illegible]; VII, [illegible], 35, 36, 37, [illegible]; VIII, 1[illegible]; IX, [illegible]; X, 2[illegible]8.
Wolfers. II, [illegible]; X, [illegible].
Wolff (J.-F.). II, [illegible], 3[illegible]4.
Wolhouse. III, [illegible].
Wolstenholme. II, [illegible], [illegible]; IV, [illegible]; VII, 28, [illegible].
Woronitz (?). XI, [illegible].
Worpitzky. I, [illegible]; VII, 1[illegible], 118; VIII, 18[illegible].
Wrede. VI, 3[illegible].
Wretschk[illegible]. VII, [illegible]; X, [illegible].
Wüllner. X, [illegible].
Xamben. II, [illegible].
Young (Fr.). I, [illegible].
Young (J.-R.). I, [illegible].
Zach (v.). VI, [illegible]; VII, [illegible].
Zacharias. I, [illegible]; II, 22[illegible]; V, [illegible]8, 2[illegible]; VII, [illegible]; X, [illegible].
Zab[illegible]. VIII, [illegible].
Zahradnik. VI, [illegible]; VIII, [illegible], 125, 127, [illegible]; IX, [illegible]; XI, [illegible].
Zajaczkowski. VIII, [illegible]; XI, 260, [illegible].
[illegible]
Zech (P.). IV, [illegible].
Zebrawski. VI, [illegible]; XI, [illegible].
Zeidler. X, [illegible].
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
Zeuthen. [illegible]; VIII, 174, [illegible]; IX, [illegible]; XI, [illegible].
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]; IV, [illegible].
[illegible]
[illegible]; III, 258, 151.

157, 158, 159, 214, 327; IV, 77, 82, 96; V, 186, 277, 278, 279; VI, 78, 241, 291; VII, 29, 30, 32, 97, 159; VIII, 133, 139, 140, 213; X, 175.
Ziegler. III, 51; IV, 207; VII, 116; VIII, 191.
Zielinski. X, 300.
Ziletti. VII, 112.
Zimmermann. VIII, 188; IX, 238; X, 293.
Zinken. III, 295, 384.
Żmurko. II, 384; III, 384; VI, 152; XI, 270.
Zöllner. I, 89, 363, 365; V, 171, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202; X, 268.
Zolotareff. IV, 59; V, 294; VI, 184, 187; VIII, 20, 90, 119.
Zorer. III, 192; X, 303.
Zrzavý. VI, 105, 251.
Zschiedrich. X, 303.
Zucchetti. V, 273.
Zuleger. II, 224.
Zumloh. X, 300.
Zurria. III, 290.

FIN DES TABLES GÉNÉRALES.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55






510.5
v.11